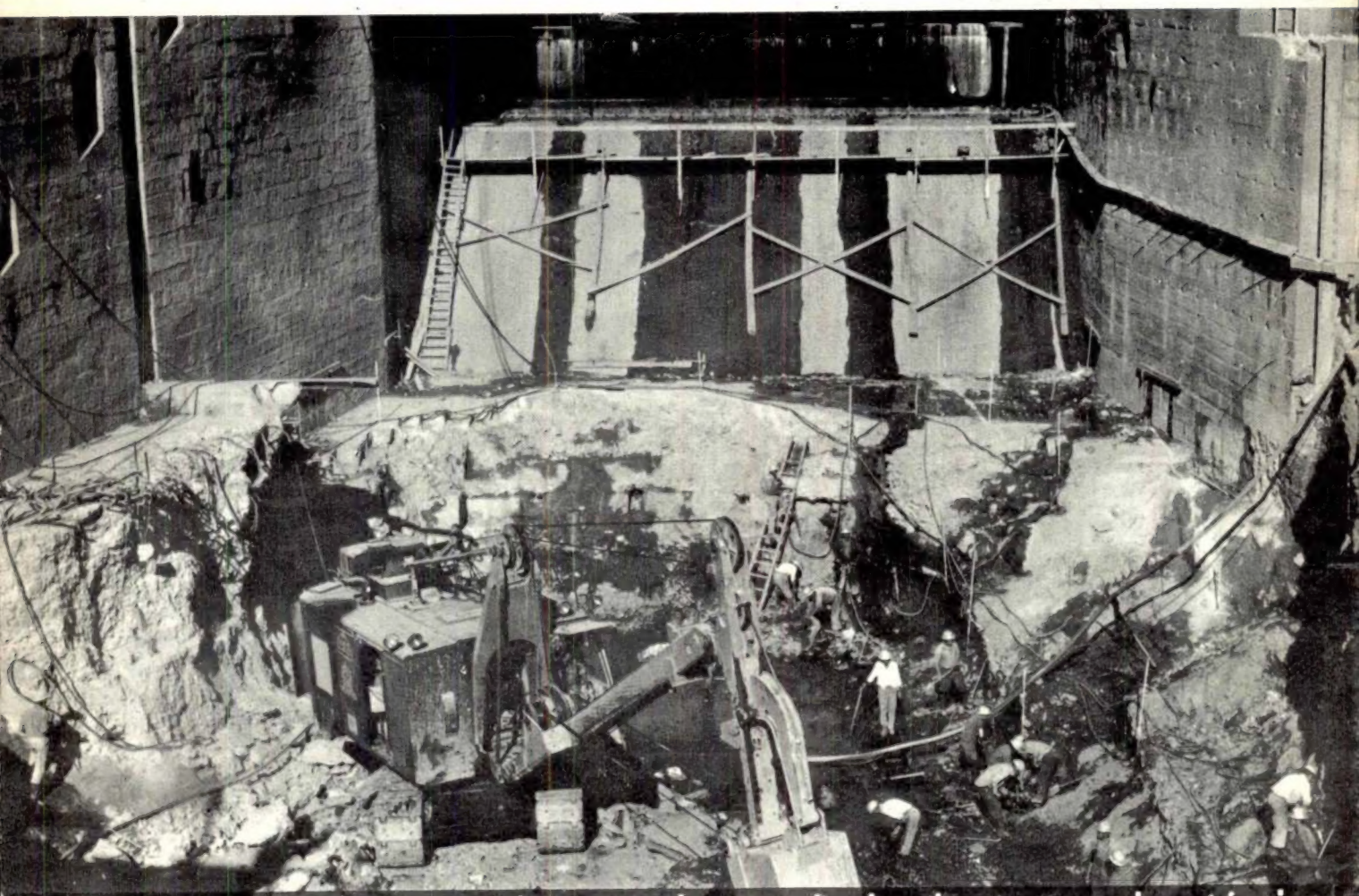
técnica



385 associação dos estudantes do instituto superior técnico
fevereiro 1969 revista de engenharia

HELIAÇO

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

Fenner

REDUTORES DE VELOCIDADE
TIPO «PONTA DE VEIO»

mais de cem anos de progresso dos maiores fabricantes ingleses

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:
AUTO-LUSITANIA
ALFREDO DUARTE L.da
AV. DA LIBERDADE 73-77 LISBOA

7.000 obras realizadas

coberturas
perfis especiais
vigas pré-esforçadas
pavimento trief
protecção de segurança

materiais novobra

pavimentos
em betão pré-esforçado
(homologados pelo Lab. Nac. de Engenharia Civil)

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS NOVOBRA, LDA.
AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100 - 5.º D.º - TEL. 774832 / 771603 - LISBOA 5

CIMENTO SECIL

SECIL

Fábrica:
Outão — Setúbal
Telef. 228824/5

Escritório:
R. do Comércio, 56-3.º
LISBOA 2
Telef. 328201/2/3

técnica

NÚMERO 385 FEVEREIRO DE 1969 ANO XLIV VOLUME XXXI PUBLICAÇÃO MENSAL

Corpo Redactorial

João M. Pereira
João Soares Alves
Rui Coutinho Torrinha
Silvério de Sousa Mendes

Editor e Proprietário

Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

Redacção e Administração

Avenida Rovisco Pais
Telefone 77 54 49
Lisboa 1

Assinaturas

		5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	—	70$00	130$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	80$00	140$00
Estrangeiro	—	90$00	150$00

Número avulso — 20$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 103 — Lisboa

SUMÁRIO

225 *DELGADO DOMINGOS* — **Efeito da variação axial da temperatura ou do fluxo térmico no coeficiente de transmissão do calor por convecção forçada num tubo.**

Effect of the axial temperature variation or of the thermal flux on the heat transfer coeficient by forced convection in a tube.

233 *CARLOS PORTELA* — **Calculadores analógicos — Aplicações a sistemas mecânicos.**

Analogic computers — Applications to mechanical systems.

263 *E. R. DE ARANTES E OLIVEIRA* — **Análise elástica de vales e taludes.**

Elastic analysis of valleys and slopes.

281 *PERES RODRIGUES* — **Estudo de vigas submetidas a cargas parabólicas.**

Study of beams subjected to parabolic loads.

262 **Notas Informativas**

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional.

280 **Do mundo técnico.**

Um aparelho de radiografia industrial, potente e muito fácil de manobrar — Blocagem do rotor sobre o eixo em motores eléctricos por uma resina anaeróbia

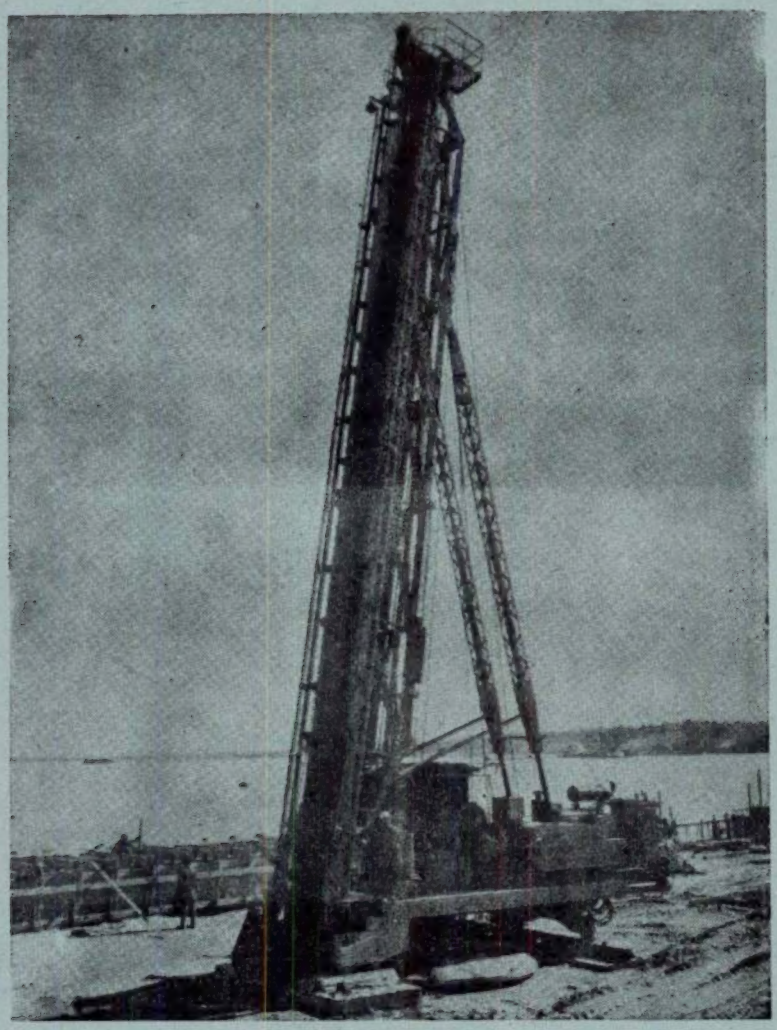
Bibliografia

CAPA: Ampliação da Central de Belver: Excavações para a instalação do novo grupo de 15,5 MW — Hidroeléctrica Alto Alentejo. Engenheiros Projectistas: Hidroeléctrica Portuguesa. Construtores: SOMEC.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XXV
Aguiar & Melo	XXIV
Asea Eléctrica	V
Auto-Lusitânia	2.ª da capa
Cerâmica de Vale de Lobos, Lda.	XXI
Cimento Secil	2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Cometna	XIV
Construções Técnicas	XVII
Dial	XXI
Electro-Arco, Lda.	II
Empresa de Cimentos de Leiria	XXVII
Empresa Electro Cerâmica	XXIII
Empresa de Produtos Asfálticos	X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Fábrica Portugal	XXII
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Guedes & Almeida, Lda.	VIII e XX
Heliaço	2.ª da capa
Hidrel	XXI
INA	XXIII
I. S. T.	VII
Isoluz	XXVIII
Jayme da Costa, Lda.	XIX
Johann Keller	V
J. F. Azevedo e Silva	IV
J. J. Silva & Irmão	V
J. Roma	VII
Kendal & Pinto Bastos	XX
MAGUE	XIII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Nucleon	XXVIII
Prisma	XXI
Siemens	XV
Soc. Const. Amadeu Gaudêncio	XXIII
Soc. Brown Boveri	4.ª da capa
Soc. Michaelis de Vasconcelos	XII
Sociedade Portuguesa Cavan	VI
Somague	XXVII
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sondagens Ródio, Lda.	VII
Sopecate	II
Standard Eléctrica	IX
Wild Portugal, Lda.	III

PARA FUNDAÇÕES DE RESPONSABILIDADE

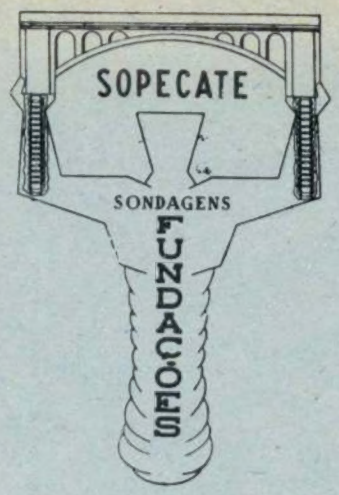


FUNDAÇÕES FRANKI L.DA

RUA BRAAMCAMP, 13-3.º — LISBOA 1 — TEL. P. P. C. 53 41 12/3/4 — ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI — LISBOA

PRÉDIO SANTOS GIL, 6.º ANDAR — SALA 10 — TEL. 9 11 67 — CAIXA POSTAL 1397

ENDEREÇO TELEGRÁFICO: FRANKI—LOURENÇO MARQUES



sopecate

sondagens - fundações

ESCRITÓRIO: RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

• ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA

• SONDAGENS

• REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS

• FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA - 1

TELEF. 56 11 71/72/73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS

PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

MATERIAL APROVADO PELOS

LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

BUREAU VERITAS

GERMANISCHER LLOYD

—

LISBOA

Rua Silva Carvalho, 239

Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS

Venda Nova — Amadora

Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO

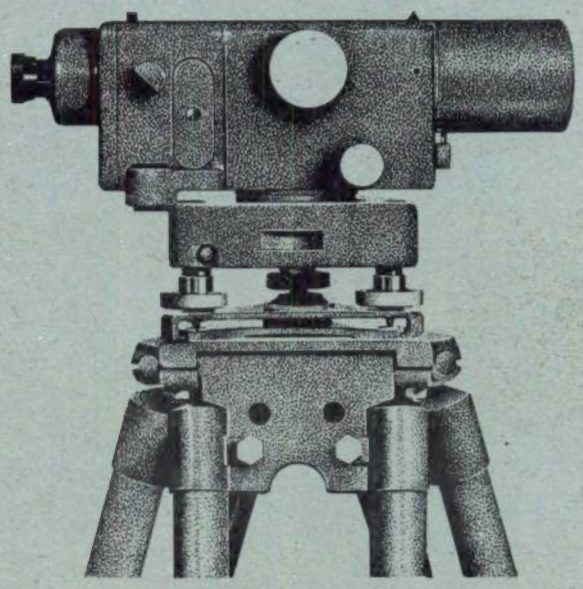
Rua do Bolhão, 216

Tel. 2 12 77 - 39 44 73

O novo Nível automático de engenheiro

WILD NAK 2

com círculo horizontal



WILD
HEERBRUGG

Para nivelamentos de média e grande precisão; com micrómetro de lâmina de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo: ± 1,5 mm

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo com micrómetro: ± 0,4 mm

Luneta de 30 × de aumento com imagem direita de observação

Solicitem catálogo ou demonstração aos representantes exclusivos

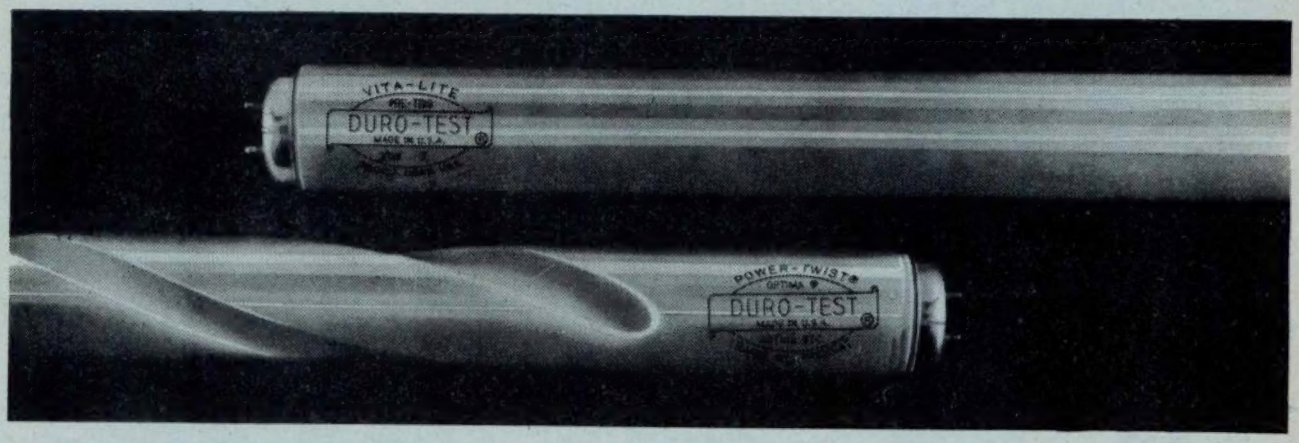
WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA - 2 — TELEFONE 68 91 12

INTRODUZA A LUZ DA NATUREZA DENTRO DE SUA CASA ESTABELECIMENTO OU ESCRITÓRIO

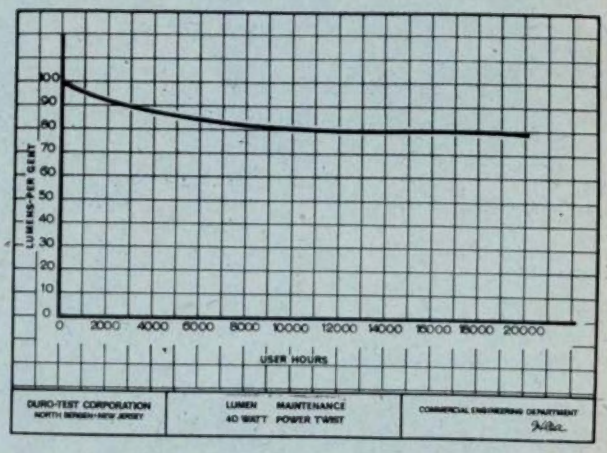
COM LAMPADAS ÓPTIMA E VITA LITE DE

Pela primeira vez na história da iluminação artificial foram concebidas fontes luminosas que reproduzem cromàticamente a luz da natureza proporcionando uma avaliação de cores exacta.



PRINCIPAIS CARACTERISTICAS

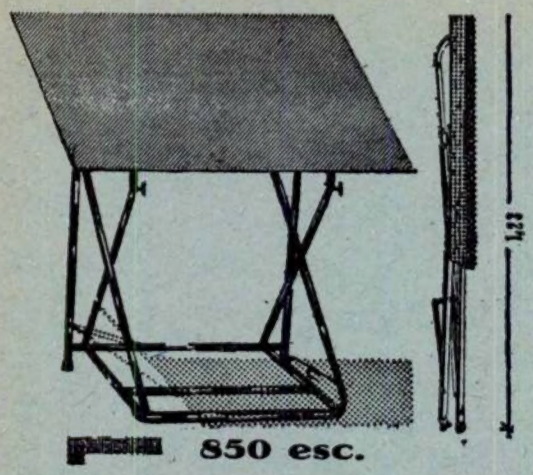
* Larga Duração — 20 000 horas de utilização com um rendimento luminoso extremamente elevado, graças a cátodos de filamento triplo.
* Formato exclusivo helicoidal POWER-TWIST para os tubos de 40W, característica esta que lhes proporciona um aumento de luz de cerca de 20% com o mesmo consumo de energia eléctrica.
* Curva de distribuição do espectro visível pràticamente coincidente com a luz da natureza, o que lhes confere um índice cromático de 91 %.
* Para a VITA-LITE, ainda a reprodução da banda invisível ultravioleta do espectro solar.
* Completa intermutabilidade com as lâmpadas fluorescentes normais de curta duração, tanto em instalações de arranque normal como arranque rápido.



PEÇA HOJE MESMO UMA DEMONSTRAÇÃO SEM QUALQUER ENCARGO OU OBRIGAÇÃO, AO REPRESENTANTE EXCLUSIVO PARA TODO O TERRITÓRIO PORTUGUÊS

J. F. DE AZEVEDO E SILVA & C.ª, L.DA

Rua S. Francisco de Sales, 2 1.º andar, Tel. 654165 — Lisboa



850 esc.

CARACTERÍSTICAS: Tubo de aço, articulado em qualquer posição, várias inclinações, fàcilmente transportável, não ocupa espaço quando fechado, prancheta de 1,20 × 0,80 de madeira, em tela. Pintura de estufa.

Em exposição, outros modelos de madeira e metálicos e todo o material de consumo e equipamento de desenho, escritório e papelaria

Distribuidores exclusivos, em Lisboa, do estirador de ***Fábrica Olaio***

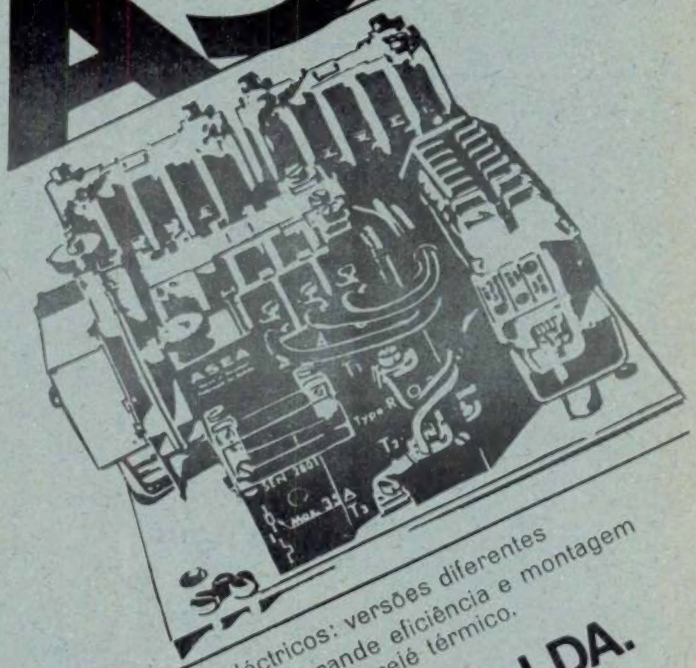
J. J. SILVA & IRMÃO, LDA.

rua silva carvalho 232-b · lisboa · telefone 652750 / 680671

MARCA · A.E.2

Uma força criadora no domínio da electricidade

Arrancadores ASEA



Para motores eléctricos: versões diferentes de arrancadores de grande eficiência e montagem fácil, com temporizador e relé térmico.

ASEA ELÉCTRICA LDA.

Estrada do Prior Velho
Tel. 251110 (5 linhas)
SACAVÉM
R. do Campo Alegre, 144
Tel. 67239
PORTO

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

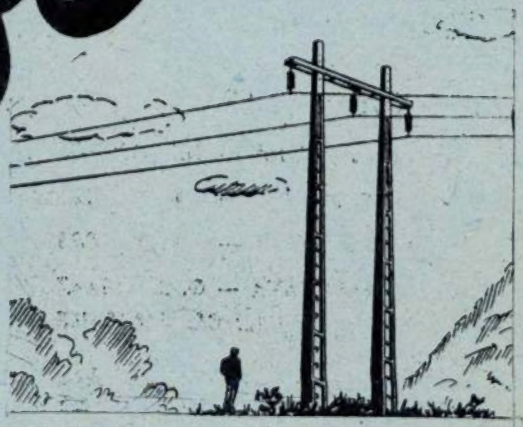
CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

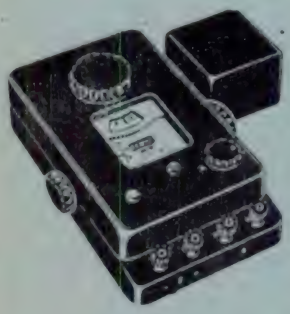
SOCIEDADE PORTUGUESA **Carvam**



RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1 - TELEF. 47812-50129

• SOLDADURA ELÉCTRICA

• MATERIAL DE PROTECÇÃO



Aparelhagem de medidas eléctricas

- indicadora
- reguladora
- registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.º — LISBOA Tel. 865151

P. do Município, 309-6.º S. 3 — PORTO Tel. 0236732

Oficina e Laboratórios

do

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDES, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO, de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA - ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva

WABCO
WESTINGHOUSE
AIR BRAKE COMPANY
CONSTRUCTION EQUIPMENT DIVISION
PEORIA, ILLINOIS 61601

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

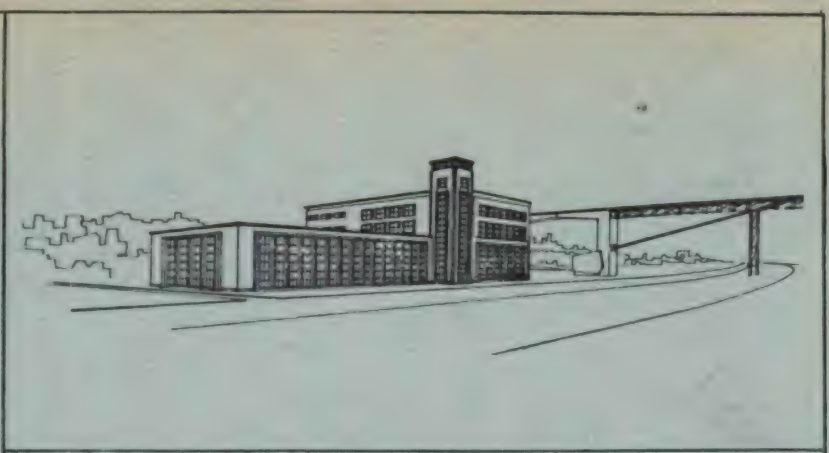
NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

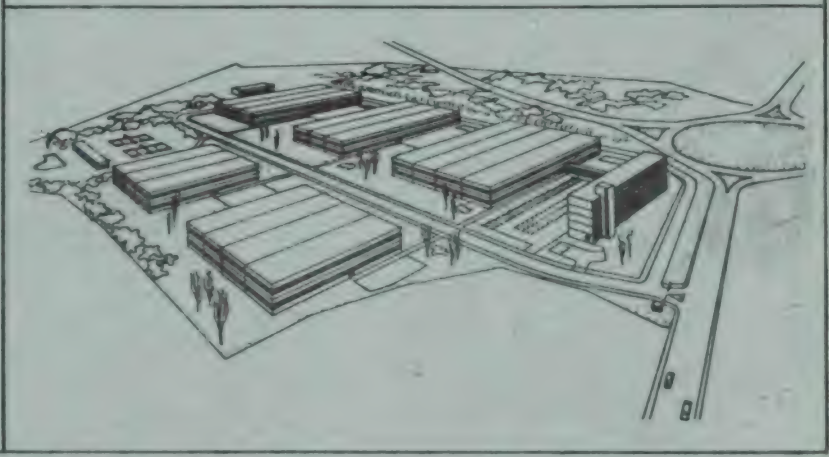
Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea, 181-2.º — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45





O CRESCIMENTO COMO FACTOR DE DESENVOLVIMENTO

Tal como as árvores, quando bem cuidadas, criam raízes, crescem, ramificam-se e dão bons frutos, assim as empresas, quando bem dirigidas, definem uma posição, desenvolvem-se, diversificam as suas actividades e lançam nos mercados produtos de alta qualidade.

A Standard Eléctrica, pioneira da indústria das Telecomunicações e Electrónica em Portugal, que em 1932 não dispunha de mais de uma escassa dezena de empregados, conta hoje com mais de 2200 pessoas nas suas fábricas de Lisboa, Cascais e Luanda.

O ritmo de crescimento e expansão tem sido de tal modo elevado que o volume de vendas passou de 30 000 contos em 1957 para 300 000 em 1967, prevendo-se que em 1970 a produção total da Standard Eléctrica atinja o valor de 1 500 000 contos, dos quais 1 000 000 se destinam à exportação.

A Standard Eléctrica é, pois, um valor positivo na indústria nacional, que tem como base o elevado nível técnico e profissional e ainda o magnífico esforço de todos os que nela trabalham.

Standard Eléctrica **ITT**

FRIO CALOR

Celulite

O material mais usado no isolamento térmico das construções

SETH, LDA. · Rua Filipe Folque, 10-1.º · Lisboa · Tel. 53 01 56

PARA COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA USE:

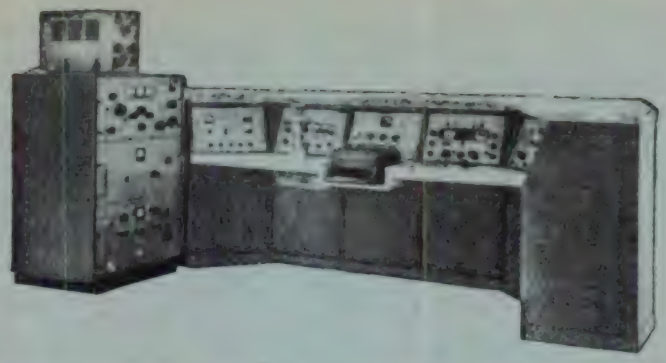
EMPRESA DE PRODUTOS ASFÁLTICOS
IMEPA
IMPERMEABILIZADOR

EMPRESA DE PRODUTOS ASFÁLTICOS
BRANQUEPA
COLAS BRANCAS

Também próprio para: impermeabilizar terrenos, paredes, fundações, etc.

FÁBRICA EM SACAVÉM

RUA FILIPE FOLQUE-10 1º— LISBOA
TELEF. 53 01 56 —TELEG. EPALDA-LISBOA



Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

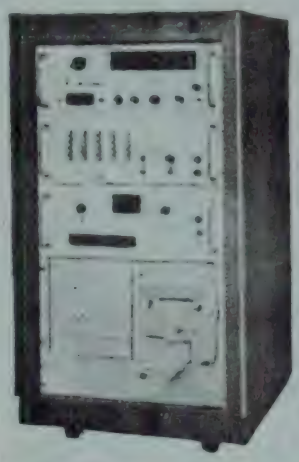
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT hp PACKARD

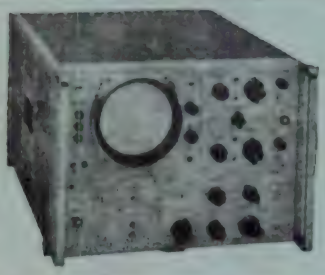
aparelhagem electrónica de medida e registo

Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec



Registador Sanborn



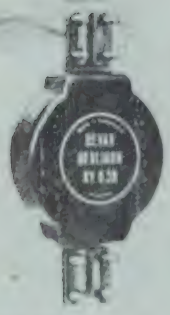
Osciloscópio HP

Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

Os pára-raios Oerlikon...

... estão na vanguarda do progresso e protegem instalações em todo o mundo



Corrente de descarga 5 kA

RV
380 & 500 V

Descarga de longas linhas em vazio, protecção de postos completos, transformadores, alternadores ou consumidores ligados a linhas aéreas. Para cada função, o pára-raios apropriado.

OERLIKON

VG/WG
6 – 37 kV

Corrente de descarga 5 e 10 kA respectivamente Ondas rectangulares 75A 1000 µs e 150A 2000 µs

WGE
40 – 73 kV

Corrente de descarga 10 kA Ondas rectangulares 150A 2000 µs Membrana anti-explosão

WM/WMR
50 – 500 kV

Insuflação magnética Corrente de descarga 10 kA, Ondas rectangulares 1000A 2000 µs Membrana anti-explosão

Para indicações mais amplas consultar os nossos representantes Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Ltda. Porto e Lisboa

Ateliers de Construction Oerlikon · Zurich (Suiça)

Representantes para Portugal e Ultramar: Sociedade Michaëlis de Vasconcellos, Lda., Porto e Lisboa

técnica

NUMERO 385 FEVEREIRO DE 1969 ANO XLIV VOLUME XXXI PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 536.25 : 532.542.1

EFEITO DA VARIAÇÃO AXIAL DA TEMPERATURA OU DO FLUXO TÉRMICO NO COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO DO CALOR POR CONVECÇÃO FORÇADA NUM TUBO

por J. J. DELGADO DOMINGOS
Prof. do I.S.T.
Núcleo de Estudos de Engenharia Mecânica (do I.A.C.)

RESUMO

Discute-se a importância das condições na superfície de permuta — temperatura ou fluxo térmico impostos — no valor do coeficiente de transmissão do calor por convecção, num tubo, os quais podem diferir substancialmente. Utilizando propriedades das equações fundamentais mostra-se como se podem calcular os coeficientes quando as condições impostas variam axialmente desde que seja conhecido o seu valor (por via teórica ou experimental) para condições uniformes.

SYNOPSIS

The importance of boundary conditions — uniform temperature or heat flux — on the heat transfer coeficient by forced convection in a tube is discussed.

Starting from the properties of the fundamental equations for heat transfer it is shown how the heat transfer coeficient can be found for axially varying boundary conditions when its value is known (experimentally or analytically) for uniform temperature or heat flux.

INTRODUÇÃO

Em todos os textos sobre transmissão de calor, com algumas preocupações de rigor, se faz a distinção entre coeficiente de transmissão por convecção forçada (h) quando a temperatura na superfície que delimita o escoamento é uniforme do caso em que é uniforme o fluxo térmico. Sob o aspecto matemático, o primeiro caso corresponde a impor como condição ao limite uma temperatura conhecida; a segunda a impor como condição o valor da sua derivada. Estas formas de condições dos limites escolhem-se pela sua simplicidade e também porque na prática correspondem muitas vezes a dois limites de funcionamento: um permutador em que um dos fluidos muda de fase aproxima-se, relativamente ao outro fluido, do caso de temperatura na superfície constante; num permutador em contracorrente em que os fluidos têm igual $G \cdot C_p$, realiza-se aproximadamente o caso dum fluxo térmico constante entre eles porque a sua diferença de temperatura também permanece constante. Existem porém muitos casos intermédios em que o projectista apenas se baseia na sua intuição e se escuda em coeficientes de segurança de que resultam quase sempre permutadores menos económicos, porque calculados com valores demasiado baixos para o coeficiente de transmissão. Noutros casos, como por exemplo em Reactores Nucleares, correm-se riscos que envolvem a segurança do núcleo porque há deficiente previsão não apenas da temperatura máxima como da posição em que a mesma se verifica nos canais de arrefecimento.

0.1. O exemplo mais simples (mas nem por isso dos menos importantes) que se pode considerar é o da transmissão do calor num tubo circular, em que o escoamento é uniforme (*).

(*) ou regime estabelecido: o perfil de velocidade não varia axialmente.

Se além do escoamento ser uniforme e laminar o regime térmico se encontra estabelecido e as propriedades físicas são constantes o número de Nusselt assume os valores:

$$N_u = \frac{hd}{k} = 3{,}658$$ Se a temperatura da parede é uniforme

$$N_u = \frac{hd}{k} = 4{,}364$$ Se é uniforme o fluxo térmico imposto na parede

Como se verifica o coeficiente de transmissão no primeiro caso é 16 % inferior ao do segundo, o que, mesmo em muitos casos de prática corrente se não pode considerar desprezável.

0.2. Os valores anteriores correspondem ao regime térmico estabelecido. Como é sabido, o coeficiente de transmissão é máximo na secção em que se inicia o aquecimento, tendendo assimptòticamente para os valores que correspondem ao regime estabelecido com o deslocamento para juzante; o mesmo sucede com a diferença entre os N_u para os casos considerados.

Como é óbvio, sob o aspecto aplicado é importante saber calcular o N_u quando nem a temperatura nem o fluxo imposto na superfície de permuta são axialmente uniformes. Basta, aliás, obter a solução para um dos casos pois uma escolha conveniente da variação de valor imposto permite realizar não só a condição ao limite correspondente ao outro caso, como a todas as situações de interesse.

Essa generalização é o objectivo do presente trabalho. Os resultados aplicam-se tanto ao regime laminar como ao regime turbulento e, embora utilizem propriedades das equações fundamentais da mecânica dos fluidos e transmissão do calor não exigem o conhecimento da solução analítica para o perfil de velocidades e temperatura. Basta o conhecimento (experimental, eventualmente) do número de Nusselt (*) em função da distância à secção onde se inicia o aquecimento.

1 MODELO FÍSICO

1.0. Admitiremos que:

a) O escoamento é uniforme pelo menos a partir da secção onde se inicia a transmissão de calor.

b) As propriedades do fluido não variam axialmente (embora possam não ser uniformes na secção transversal).

c) A temperatura do fluido é uniforme antes de se iniciar a permuta de calor.

d) A condução axial no fluido (**) é desprezável, tal como na superfície de permuta. Não se tem em conta a dissipação viscosa.

e) O regime é estacionário.

f) Existe simetria axial quanto às condições impostas na superfície.

Fazendo coincidir o eixo dos xx com o eixo do escoamento e designando por x(y,z) a velocidade do fluido, a equação de conservação da energia escreve-se [1] atendendo às hipóteses anteriores.

$$1)\quad \rho c_p u \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k_t \frac{\partial \Theta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{d z}\left(k_t \frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)$$

Sendo $\Theta = T - T_o$.

Para o tubo de secção circular, utilizando coordenadas cilíndricas a equação anterior escreve-se:

$$1')\quad \rho c_p u \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k_t r \frac{\partial \Theta}{\partial r}\right)$$

Devendo a solução de 1) ou 1') obedecer às condições dos limites:

2) $\Theta = o$ para $x = o$

e

3) $k \frac{\partial \Theta}{\partial n} = q_p$ Sobre a superfície se o fluxo é imposto (***).

ou

4) $\Theta = \Theta_p$ Sobre a superfície de permuta se a temperatura é imposta(*).

As condições 3) e 4) correspondem os valores assimptóticos referidos em 0.1 para o caso do

(*) ou de h, como é óbvio.
(**) O que é admissível para $P_e > 100$.
(***) Para $r = R$ no caso do tubo

tubo em regime laminar estabelecido ou os conhecidos para regime turbulento [2](*).

Para o regime térmico não estabelecido admitamos que é conhecido (p. ex. experimentalmente) o número de Nusselt em função de x:

$N_{uxq} = f(x)$ para o caso do fluxo imposto na superfície (condição 2) e 3)) mas constante (**)

$N_{uxT} = f_1(x)$ para o caso de temperaturas impostas mas constantes (condição 2) e 4)

O problema consiste em saber o valor de N_{ux} quando, na superfície, q ou T variarem axialmente,

$$3') \qquad \frac{k\,\partial\Theta}{\partial n} = \varphi(x) \qquad x \varepsilon B$$

$$4') \qquad \Theta = \varphi_T(x) \qquad x \varepsilon B$$

e que designaremos respectivamente por N^*_{uxq} e N^*_{uxT} (**).

2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA

2.1 Nas hipóteses do modelo, 1) (ou 1') é linear e homogénea.

Além disso, sendo de primeira ordem em $\frac{\partial\Theta}{\partial x}$ e $O \leqslant x \leqslant \infty$ demonstra-se fàcilmente [1,3] que:

se $\Theta(x,y)$ é a solução correspondente a 1, 2 e 3) a solução correspondente a 1) 2) e 3') é dada por (***)

$$5) \quad \Theta^* = \frac{1}{q}\int_0^x \varphi(x-z)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_{(z,P)} dz$$

ou

$$6) \quad \Theta^* = \frac{1}{q}\int_0^x \varphi(z)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)_{(x-z,P)} dz$$

a qual é também, «mutatis mutandis» a correspondente a 4').

2.2. Por definição

$$7) \quad h_x = \frac{-k\left(\frac{\partial\Theta}{\partial n}\right)_B}{\Theta_m - \Theta_B} = \frac{q}{\Theta_m - \Theta_B} = N_{ux}\frac{k}{d} \; (****)$$

sendo

$$8) \quad \Theta_m = \frac{\int_s \rho u c_p \Theta ds}{\int_s \rho u c_p ds} = \frac{1}{C}\int_s \rho u c_p \Theta ds$$

a temperatura «adiabática» ou de «mistura» na secção do escoamento [3].

Quando o fluxo na superfície varia segundo 3') será

$$a) \quad h^*_{xq} = \frac{\varphi(x)}{\Theta^x_m - \Theta^x_B} = N^*_{uxq}\frac{k}{d}$$

mas, por balanço térmico

$$10) \quad \Theta^*_m(x) = \int_0^x \frac{\varphi(x)}{c}\,dx = \frac{1}{C}\int_0^x \varphi(x)\,dx$$

e Θ^*_B é dada por 5) ou 6) pondo $P = B$

$$11) \quad \Theta^*_B = \frac{1}{q}\int_0^x \varphi(x-z)\left(\frac{\partial\Theta_B}{\partial x}\right)_{(z,P)} dz$$

Por hipótese, N_{uxq} é conhecida pelo que, da definição 7)

$$12) \quad \Theta_B = \Theta_m - \frac{qd}{k\,N_{uxq}}$$

e como

$$13) \quad \Theta_m = \int_0^x \frac{q}{C}\,dx = \frac{q}{C}\,x$$

resulta substituindo 13) em 12), 12) em 11) e 11) e 10) em 9)

---

*) Note-se que os valores assimptóticos são independentes da condição imposta em $x = O$.

**) Usamos o índice x para relembrar a variação axial de N_u e os índices q ou T consoante se trata do fluxo ou da temperatura imposta.

***) Supõe-se $\varphi(x)$ ou $\varphi_1(x)$ continua em x. Se o for apenas por troços resultam termos aditivos em 5) ou 6) que se determinam imediatamente atendendo às propriedades da transformada de Laplace [4].

****) Como é óbvio, h_{xq} corresponde a impor o valor do numerador, h_{xT} a impor Θ_B.

$$14)\quad h^*_{xq} = N^*_{uxq}\,\frac{k}{d} = \frac{\varphi}{\int_o^x \varphi(x-z)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{h_{xq}}\right)_{x=z} dz}$$

e

$$15)\quad N^*_{uxq} = \frac{\varphi}{\int_o^x \varphi(x-z)\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{N_{uxq}}\right)_{x=z} dz}$$

2.3. Considere-se agora o caso da temperatura na superfície ser variável, isto é, a determinação de N^*_{uxT} quando N_{uxT} é conhecido.

Da definição de h_{xT} (ou N_{uxT}) resulta que

$$16)\quad \Theta_p - \Theta_m = \Theta_p^{-\frac{1}{C}\int_o^x h_{xT}dx}$$

e que

$$\Theta^*_m = (\varphi_1 - \Theta^*_m)\,dx = \frac{1}{C}\int_o^x q^*_{zt}\,dz =$$

$$= \frac{1}{C}\int_o^x h_{zt}(\varphi_1 - \Theta^*_m)\,dz$$

$$17)\quad \frac{d\Theta^*_m}{dx} = h^*_{xT}(\varphi - \Theta^*_m) = q^*_{xT}$$

mas

$$\Theta^*(x,P) = \frac{1}{\Theta_p}\int_o^x \varphi_T(x-z)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)(z\,P)$$

pelo que

$$\Theta^*_m(x) = \frac{1}{C}\int_s \rho\,u\,\Theta^*(x,P)\,ds =$$

$$= \frac{1}{C}\int_s \frac{1}{\Theta_p}\int_o^x \rho u_p \varphi_T(x-z)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) dz\,ds;$$

permutando $\int_s$ e $\int_o^x$, e atendendo à definição de Θ_m

$$18)\quad \Theta^*_m(x) = \frac{1}{\Theta_p}\int_o^x \varphi_T(x-z)\left(\frac{\partial\Theta_m}{\partial z}\right) dz$$

donde, por 16)

$$19)\quad \Theta^*_m(x) = \frac{1}{C}\int_o^x h_{zT}\,\varphi_T(x-z)\,dz$$

e atendendo à definição de h^*_{xT}

$$20)\quad h^*_{xT} = \frac{\frac{d}{dx}\int_o^x h_{zT}\,\varphi_T(x-z)\,dz}{\int_o^x h_{zT}\,\varphi_T(x-z)\,dx - C\,\varphi_T}$$

e

$$21)\quad N^*_{uxT} = \frac{\frac{dx}{d}\int_o^x N_{uzT}\,\varphi_T(x-z)\,dz}{\int_o^x N_{uzT}\,\varphi_T(x-z)\,dz - \frac{k}{d}\,C\,\varphi_T}$$

2.4 — O problema enunciado encontra-se pois formalmente resolvido pelas expressões 14), 15), 20), e 21). Na sua solução admitiu-se que N_{uxq} e N_{uxT} eram conhecidos por via experimental ou teórica.

Deixando para discussão ulterior as várias correlações teóricas até hoje propostas, afigura-se de interesse mostrar como as mesmas podem ser obtidas teòricamente, o que será objecto do capítulo seguinte.

3. SOLUÇÕES EXACTAS PARA N_{uxq} E N_{uxT} EM REGIME LAMINAR NO CASO DUM TUBO DE SECÇÃO CIRCULAR [5,6]

3.0 O problema consiste na solução de 1') sujeito a 2) e a 3) ou 4) consoante se tratar de N_{uxq} ou N_{uxT}.

Considerem-se as variáveis adimensionais

$$22)\quad \Theta^* = \frac{T_p - T}{T_p - T_o}\qquad r^* = \frac{r}{R}\qquad u^* = \frac{u}{U_m}\qquad x^* = \frac{\frac{x}{R}}{R_e\,P_r}$$

Introduzidas em 1') resulta:

$$\frac{\partial^2\Theta^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial\Theta^*}{\partial r^*} = \frac{u^*}{2}\frac{\partial\Theta^*}{\partial x^*} - \frac{1}{(R_e P_r)^2}\frac{\partial^2\Theta^*}{\partial x^{*2}}$$

sendo $u^* = 2(1 - r^{*2})$ a solução da equação do movimento para escoamento uniforme, a equação anterior pode escrever-se (*):

$$23)\quad \frac{\partial^2\Theta^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial\Theta^*}{\partial r^*} = (1 - r^{*2})\frac{\partial\Theta^*}{\partial x^*}$$

e 2) 3) e 4) transformam-se respectivamente em

$$24)\quad \Theta^* = 1 \text{ para } x^* = O$$

$$25)\quad \left(\frac{\partial\Theta^*}{\partial r^*}\right) = \frac{q\,R}{k\,(T_p - T_o)} \text{ para } r^* = 1$$

A solução do problema pode obter-se pelo método de separação de variáveis [7], admitindo que

$$27)\quad \Theta^*(r^*, x^*) = \psi(r^*).X(x^*)$$

pelo que ψ e X devem satisfazer a

$$28)\quad X' + \lambda_n^2 X = O$$

$$29)\quad \psi_n'' + \frac{1}{r^*}\psi_n' + \lambda_n^2\psi_n(1 - r^{*2}) = O$$

A solução de 28) é

$$X_n = a_n e^{-\lambda_n^2 x^*}$$

Sendo a_n uma constante arbitrária e λ_n o valor próprio determinado por 29) e 25) ou 26) consoante a condição ao limite adoptada.

Pode demonstrar-se que os λ_n são em número infinito e que a cada λ_n corresponde ψ_n solução de 29), os quais constituem um sistema completo.

Deste modo, a solução final é da forma

$$30)\quad \Theta^*(x^*, r^*) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n\psi_n(r^*)\,e^{-\lambda_n^2 x^*}$$

(*) Despreza se o último termo se $R_e P_r > 100$, pelas razões já apresentadas.

Sendo os a_n os coeficientes do desenvolvimento de $\Theta^*(r^*, o) = 1$ em termos dos ψ_n.

3.1. Designando por G_n o valor assumido por ψ_n $r^* = 1$

$$G_n = \psi_n(1)$$

no caso em que 26) é a condição no limite, obtém-se que

$$31)\quad q = \frac{2k}{R}\sum_{o}^{\infty} G_n e^{-\lambda_n^2 x^*}(T_p - T_e)$$

$$32)\quad \Theta^*_m = 8\sum_{o}^{\infty}\frac{G_n}{\lambda_n 2}e^{-\lambda_n^2 x^*}$$

$$33)\quad N_{uxt} = \frac{\sum_{o}^{\infty} G_n e^{-\lambda_n^2 x^*}}{2\sum_{o}^{\infty}\frac{G_n}{\lambda_n^2}e^{-\lambda_n^2 x^*}}$$

os valores de λ_n e G_n calculadas por Sellars et al [5] são os seguintes:

n	λ_n^2	G_n
0	7,312	0,749
1	44,62	0,544
2	113,8	0,463
3	215,2	0,414
4	348,5	0,382 (*)

Para $x^+ > 0{,}1$, apenas o primeiro termo dos desenvolvimentos é importante e obtém-se que (**)

$$34)\quad N_{uT} \simeq \frac{\lambda_o^2}{2} = 3{,}658$$

que corresponde ao regime térmico estabelecido.

3.2. Anàlogamente, obter-se-á para o caso de fluxo imposto, condições

$$35)\quad N_{uxq} = \frac{11}{44} - \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n^2 x^+}}{H_m\lambda_m^4}$$

Sendo

$H_m = \psi_n$ (1) em que ψ_n satisfaz neste caso a 25).

Os valores de λ_m e H_m calculados por Sparrow et al [6] são

m	λ_m^2	H_m
1	25,68	$7{,}630 \times 10^{-3}$
2	83,86	$2{,}058 \times 10^{-3}$
3	174,2	$0{,}901 \times 10^{-3}$
4	296,5	$0{,}487 \times 10^{-3}$
5	450,9	$0{,}297 \times 10^{-3}$ (*)

(*) Para $m > 5$ $\lambda_m = +4m \frac{4}{3}$; $H_m = 0{,}358\ \lambda_m^{-2,32}$

(*) Para $n > 2$, $\lambda_n = 4n + \frac{8}{3}$; $G_n = 1{,}01276\ \lambda_n^{-1/3}$

(**) $x^+ > 0{,}1$ define aproximadamente a região de entrada que será dada por $x \simeq 0{,}05\ R_e\ P_r \cdot d$

4 — EXEMPLO

Considere-se o caso do canal de arrefecimento dum reactor nuclear, onde o fluxo térmico varia sinusoidalmente na direcção axial segundo:

$$\frac{q_p}{q_{pmax}} = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

sendo L o comprimento do canal.

Usando a expressão exacta para N_{uxq} dada por 35) e introduzindo em N^*_{uxq} dado por 21) obtém-se para a diferença de temperatura entre a superfície e o fluido de arrefecimento [2]

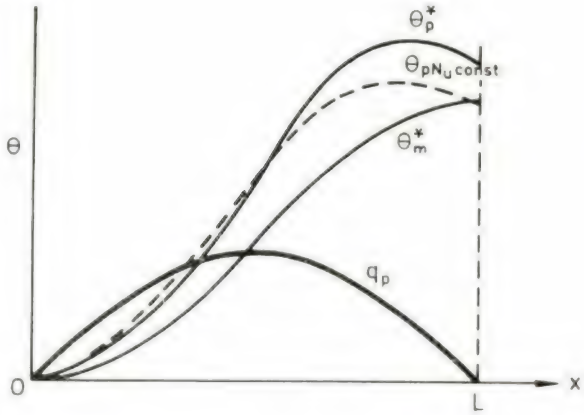
$$\Theta = T_p - T_o = \frac{q_{max} R}{k} \left[\frac{4}{A}\left(1 - \cos(Ax^*)\right) + \right.$$

$$+ \text{sen}\,(A\,x^*) \sum \frac{1}{H_m\,(\lambda_m^4 + A^2)}$$

$$- A \cos(A\,x^*) \sum \frac{1}{\lambda_m^2\,A_m\,(\lambda_m^4 + A^2)} +$$

$$+ \sum \frac{e^{-\lambda_m^2 x^*}}{\lambda_m^2 H_m\,(\lambda_m^4 + A^2)}$$

A seguir representa-se de modo aproximado a forma de solução, tal como a temperatura da superfície fazendo o cálculo para um valor constante de N_{uq}, correspondente ao regime estabelecido.



Como se verifica, o cálculo habitual com N_{uq} = constante subestima a temperatura máxima da superfície e a posição onde a mesma se verifica. Obviamente, o valor do erro dependerá de q_{max}, mas o exemplo mostra como pode ser importante a consideração dum cálculo mais exacto, pelo menos em condições extremas de funcionamento.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. J. D. Domingos — *As equações fundamentais em mecânica dos fluidos e transmissão do calor* — Rev. Portuguesa de Química, vol. 8, p. 88 — 1966.

[2] W M. Kays — *Convective Heat and Mass Transfer* — McGraw-Hill

[3] J. J. D. Domingos — *Caldeiras e Permutadores de Calor* — AEIST.

[4] R. V. Churchill — *Operational Mathematics* — McGraw-Hill

[5] Sellars, Tribus, Klein — Trans. ASME — 1956 — p. 441.

[6] Sparrow, Seigel — *Appl. Sci. Research* — Série A, vol. 7, p. 386 — 1958.

[7] J. J. D. Domingos — *Condução do calor* — Técnica, vol. 38, p. 309 — 1963.

SIMBOLOGIA

B fronteira do domínio — intersecção da superfície de permuta por um plano normal ao escoamento

P — ponto genérico em (x, y)

d — diâmetro hidráulico

R — raio exterior do tubo

r — coordenada radial

n — normal exterior a B

h — coeficiente de transmissão de calor por convecção

k — condutibilidade térmica do fluido

k_t — condutibilidade térmica total (molecular + + turbulento)

ρ — massa específica do fluido

c_p — calor específico do fluido a pressão constante

u — velocidade

S — secção do escoamento

$$U_m = \frac{1}{S} \int_s u \, ds$$

$$C = \int_s \rho u c_p \, ds$$

$$G = \int_s \rho u \, ds$$

Re — número de Reynolds

$$P_r = \frac{c_p \mu}{k} = \text{número de Prandtl}$$

$$N_u = \frac{hd}{k} = \text{número de Nusselt}$$

Pe = Re. Rr — número de Péchet

q = fluxo térmico por unidade de comprimento do tubo.

NOTICIÁRIO

Colóquio Internacional Sistemas lógicos. Concepção e aplicações

A Société Royale Belge des Electriciens organiza em Bruxelas nos Laboratórios de Electrónica Industrial e Automática da Universidade livre de Bruxelas de 15 a 20 de Setembro 1969, um colóquio internacional sobre SISTEMAS LÓGICOS, sua concepção por meios sistemáticos e suas aplicações científicas e industriais.

Esta manifestação tem por fim criar contactos entre as pessoas que se interessam por um lado pelo estudo teórico, e por outro pela sua aplicação científica e industrial.

Informações:

Dr. J. Florine
Colloque International
Université Libre de Bruxelles 50, avenue F. D. Roosevelt Bruxelles 5 — Belgique

Conferências PRO-AQUA — «A água e o ar na indústria»

Como nas precedentes realizações, em 1958, 1960 e 1965 o 4.º salão internacional sobre ar e água, PRO-AQUA 69, que terá lugar de 29 de Maio a 4 de Junho de 1969, nos salões da Feira Suíça de amostras em Bäle, será acompanhada de conferências internacionais. As conferências gravitarão à volta do tema «A água e o ar na indústria», e 3 temas distintos formarão 3 grupos:

No tema A os especialistas Alemães, Franceses, Ingleses, Belgas e Suíços falarão do estado actual das realizações de instalações de purificação de águas usadas e da utilização de água em circuito fechado nas indústrias dos respectivos países.

O tema B é consagrado ao saneamento do ar na indústria.

O tema C dirá respeito aos problemas de distribuição de água e da eliminação das águas usadas nalguns grupos industriais.

De 2 a 5 de Junho de 1969 desenvolver-se-á, em relação com a PRO-AQUA 69, o 4.º congresso internacional sobre os tratamentos das imundícies (GIROM).

V Colóquio de Directores e Técnicos de Fábricas de Cimento

Durante os dias 5 a 8 de Maio próximos, realizar-se-ão, no Instituto Eduardo Torroja da Construção e do Cimento, os V Colóquios de Directores e Técnicos de Fábricas de Cimento.

O tema geral deste V colóquios será a «Automação de Fábricas de Cimento», e até ao momento verifica-se um grande interesse principalmente nos países de língua espanhola e portuguesa.

Trabalha-se actualmente na organização dos colóquios que reunirão à volta de 200 especialistas de diversos países.

Feira de Hannover de 1969 26 de Abril a 4 de Maio

Apresentam-se nesta feira (pavilhão 7) produtos de alta qualidade em ferramentas, sendo a participação estrangeira de quase 1/3, perfazendo um total de 101 casas de 19 países. Esta cifra compõe-se de 27 expositores directos e 74 casas representadas. Estas firmas provêm essencialmente dos Estados Unidos, França, Grã-Bretanha, Países Baixos, Suécia e Suiça.

No pavilhão 5-A apresenta-se uma exposição sobre máquinas de ensaio e balanças. Expõem 26 expositores directos e 8 firmas, pertencendo à Gran-Bretanha, Áustria, Suécia, Suíça e Estados Unidos.

Nos edifícios 11 e 11-B, 105 casas expõem aparelhos de Rádio e Televisão, assim como artigos de Fonotécnica e antenas. Além destes pavilhões, as indústrias eléctricas ocupam ainda os edifícios 1, 10, 11, 11-A, 12 e 13. Encontram-se aqui grupos elaboradores de produção e transformação de electricidade, distribuição e aplicação de energia eléctrica técnica de informação, técnica de recepção de rádio, acústica eléctrica, elementos de construção, técnicas de medição, controle, regulação e distribuição.

Nas salas 16-A, 16-B e 16-C estão expostos artigos sobre Oleohidrosílica e Pneumática, bombas, condensadores, e armaduras.

MAGUE

Guindaste de 8 t 17 m, com colher, para manuseamento de carvão fornecido à SECIL para a sua Fábrica de Outão - Setúbal.

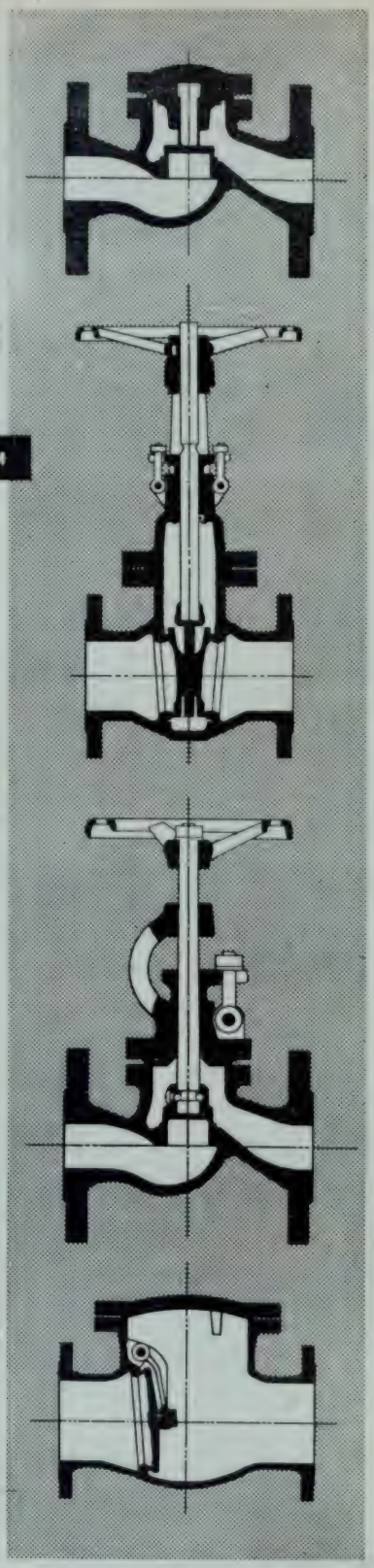
PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

válvulas

- passagem
- retenção
- regulação
- cunha
- motorizadas



PARA LIQUIDOS, VAPORES E GASES (INCLUINDO NH_3 E SO_2) EM

ferro fundido
ferro fundido com grafite esferoidal
aço vasado
aço inoxidável

DN 10 mm até 600 mm ; **PN 6 a 40 kg/cm²**

conforme as normas **DIN** e **ASA**

VÁLVULAS DE SEGURANÇA, DE REDUÇÃO, ELECTROMAGNÉTICAS E VÁLVULAS ESPECIAIS

- estudos
- projectos
- orçamentos
- assistência técnica

SOCIEDADE PORTUGUESA DE VÁLVULAS, LDA.

RUA DA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS, 5 - LISBOA, 2

TELEFONE: PPCA 32 00 11 - 8 LINHAS

C. D. U. 681.14:218.3

CALCULADORES ANALÓGICOS

APLICAÇÕES A SISTEMAS MECÂNICOS*

Por CARLOS DE MEDEIROS PORTELA
Doutor em engenharia electrotécnica

RESUMO

Este artigo trata da aplicação de calculadores analógicos a sistemas mecânicos. São analisados os seguintes aspectos:

— Análogos eléctricos.

— Tipos de análogos eléctricos.

— Circuitos lineares de parâmetros concentrados.

— Análogo da relação entre forças e deslocamentos generalizados em elementos actuados em dois pontos. Aplicação a sistemas complexos.

— Aspectos conceptuais e metodológicos do cálculo analógico.

— Análogos de alguns sistemas mecânicos simples em regime estático e dinâmico.

— Análogos de uma viga em regime estático e dinâmico.

— Análogo de uma barra sujeita a torção em regime dinâmico.

— Regimes livres. Frequências próprias. Representação modal. Análise de vibrações.

— Análogos de elementos não lineares.

— Análogos de placas em regime estático.

— Análogos aplicáveis a problemas de condução de calor.

SYNOPSIS

This paper deals with analogic computers and their application to mechanical systems. The following aspects are presented:

— Electrical analogs.

— Types of electrical analogs.

— Linear networks of lumped parameters.

— Analog of the relation between generalized forces and displacements in elements actuated in two points. Application to complex systems.

— Conceptual and methodologic aspects of analogic computation.

— Analogs of some simple mechanical systems in static and dynamic regime.

— Analogs of a beam in static and dynamic regime

— Analogs of a beam submited to torsion in dynamic regime.

— Free regimes. Natural frequencies. Modal representation. Vibration analysis.

— Analogs of non linear elements.

— Analogs of plates in static regime.

— Analogs applicable to heat conduction problems.

1. CÁLCULO ANALÓGICO

O cálculo analógico corresponde na sua essência a uma atitude mental, como qualquer actividade intelectual do homem.

Dada a facilidade de aplicação, comodidade e baixo preço, tem sido objecto de um sem número de utilizações dispersas, nos mais variados domínios e com os mais diversos pontos de vista e meios.

Consequentemente, nesse quase caos de formas concretas, sobressai com relativa nitidez a essência das ideias, no sentido de Platão. E, da generalidade de assuntos tratados, sobressai a grande uniformidade dos domínios da ciência e da técnica, quanto aos seus aspectos fundamentais.

O cálculo analógico é a transposição para a ciência e técnica da filosofia das ideias de Platão, sendo surpreendente a profundidade da sua correspondência com essa filosofia, o que traduz, talvez, a causa da fecundidade do cálculo analógico, principalmente como atitude mental, para além das formas particulares de que se revista a sua aplicação.

E, assim, não é de admirar que se chegue a beneficiar de grande parte das vantagens do cálculo analógico utilizando apenas as suas atitudes e métodos topológicos, matemáticos e lógicos, mesmo sem dispor de análogos físicos concretos. Por exemplo, o cálculo analógico pode ser um simples processo de formular um problema para a sua resolução num calculador digital.

Quando, para determinar a altura das pirâmides do Egipto, um grego utilizou uma estaca e a medida de comprimento da sua sombra, estava a aplicar uma forma já relativamente evoluída do cálculo analógico, mais abstracta que a simples escala geométrica, pois, além dessa escala, utilizou uma estilização dos parâmetros da pirâmide que condicionam a sua sombra. É curioso que nessa

(*) Conferência proferida no Instituto Superior Técnico em 10 de Fevereiro de 1969.

aplicação concreta tenha surgido a sombra física, tal como na alegoria platónica.

No seu sentido mais comum, pode dizer-se que se utiliza o cálculo analógico quando se estabelece uma correspondência entre os parâmetros de um fenómeno a estudar e os parâmetros de um sistema físico concretamente representado.

Deve notar-se que, abstraindo um pouco, se pode prescindir da condição de representar concretamente o sistema físico análogo, sem perder o que há de essencial e mais útil no cálculo analógico.

O fenómeno físico escolhido para análogo pode ser qualquer. A régua de cálculo é um exemplo simples de calculador analógico. Estabelece-se uma correspondência entre dois números e os seus logaritmos, e efectua-se mecânicamente a soma dos logaritmos, «análogo» da multiplicação dos dois números.

Verificou-se um desenvolvimento maior e mais sistemático de análogos eléctricos, bàsicamente por razões tecnológicas, de custo, e de facilidade de variação de parâmetros e de estabelecimento de ligações topológicas.

No entanto, a escolha de grandezas electromagnéticas para o análogo nada tem de essencial. Essa escolha, se por um lado foi e é vantajosa, teve, no entanto, um inconveniente, ligado ao carácter degenerado de algumas relações tensoriais dos circuitos eléctricos lineares estáticos passivos. Essa degenerescência tem diversas vantagens quanto à simplicidade das relações, mas, em certa medida, constituiu um obstáculo ao reconhecimento do carácter intrìnsecamente tensorial de algumas relações, e constitui uma dificuldade na representação física com circuitos eléctricos concretos e simples de relações em que se não verifique essa degenerescência.

2. TIPOS DE ANÁLOGOS ELÉCTRICOS

Para muitas aplicações concretas, a utilização de um análogo particular muito simples é a forma mais adequada de resolver problemas por vezes complexos.

Este facto, se por um lado é útil, tem sido o maior obstáculo ao desenvolvimento sistemático e generalizado do cálculo analógico. A situação quase oposta dos calculadores digitais constituiu a causa do relativo atraso com que se desenvolveram, mas constitui também a causa da sua rápida generalização, uma vez atingido o «limiar» de justificação que permita a sua existência.

Há grande diversidade de análogos eléctricos, sendo um tanto artificial a sua sistematização.

Podem considerar-se, bàsicamente, os seguintes grandes grupos:

- Circuitos lineares de parâmetros concentrados.
- Circuitos não lineares de parâmetros concentrados.
- Circuitos de parâmetros distribuídos.
- Circuitos com relações algébricas num domínio complexo.
- Circuitos com elementos normalmente designados por amplificadores operacionais.

Em palestra anterior foram apresentadas as suas principais características ([1]). Por esse motivo, e para não alongar a exposição não o faço aqui.

3. CIRCUITOS LINEARES DE PARÂMETROS CONCENTRADOS

Vou indicar em primeiro lugar algumas analogias eléctricas aplicáveis ao caso de estruturas mecânicas, utilizando análogos constituídos por elementos lineares passivos de parâmetros concentrados.

Na fig. 3-1 indicam-se algumas relações para elementos simples do tipo anterior.

4. ANÁLOGO DA RELAÇÃO ENTRE FORÇAS E DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS EM ELEMENTOS ACTUADOS EM DOIS PONTOS. APLICAÇÃO A SISTEMAS COMPLEXOS

Consideremos em primeiro lugar, para realçar alguns aspectos essenciais do cálculo analógico, o caso de tubagens hiperestáticas, por exemplo como representado esquemàticamente na fig. 4-1, constituídas por três ramos a′ b′, a″ b″, a‴ b‴, designados genèricamente por ab.

Cada ramo é caracterizado, em determinadas condições, por uma relação da forma

1) $\| X_a - X_b \| = \| T \| . \| F \|$

([1]) «Introdução ao cálculo analógico». *Técnica* 376, 1968.

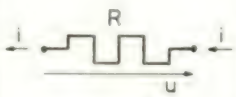
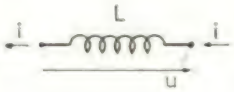
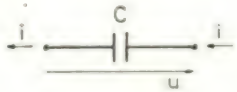
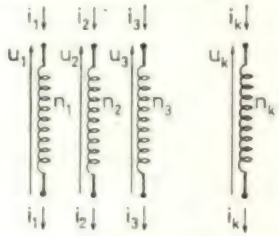
Designação	Resistência	Indução	Condensador	Transformador ideal
Representação				
Relações entre os valores instantâneos das grandezas	$u = R\,i$ $i = \frac{1}{R}\,u$	$u = L\frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L}\int u\,dt$	$u = \frac{1}{C}\int i\,dt$ $i = C\frac{du}{dt}$	$i_1 + i_2 + \ldots + i_k = 0$ $n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_k i_k = 0$ $\frac{u_1}{n_1} = \frac{u_2}{n_2} = \ldots = \frac{u_k}{n_k}$
Relações entre os valores das grandezas em regime estacionário	$u = R\,i$ $i = \frac{1}{R}\,u$	$u = 0$ $i = \text{const.}$	$u = \text{const.}$ $i = 0$	
Relações entre os valores das grandezas em regime alternado sinusoidal de pulsação ω	$U = R\,I$ $I = \frac{1}{R}\,U$	$U = j\omega L\,I = j\,X\,I$ $I = -j\frac{1}{\omega L}\,U = -j\frac{1}{X}\,U$	$U = -j\frac{1}{\omega C}\,U = -j\frac{1}{S}\,U$ $I = j\omega C\,U = j\,S\,U$	$I_1 + I_2 + \ldots + I_k = 0$ $n_1 I_1 + n_2 I_2 + \ldots + n_k I_k = 0$ $\frac{U_1}{n_1} = \frac{U_2}{n_2} = \ldots = \frac{U_k}{n_k}$

Fig. 3-1 — Relação entre as grandezas nalguns elementos eléctricos lineares estáticos passivos. Representa-se por i o valor instantâneo de uma corrente, por u o valor instantâneo de uma tensão, e por I e U os complexos ou vectores associados a i e u, para i e u sinusoidais no tempo, de pulsação ω. Para grandezas sinusoidais de igual pulsação ω e todas em fase ou oposição, em análogos de regimes estatísticos, I e U representam as «amplitudes algébricas» de i e u, no sentido indicado no texto. O transformador ideal constitui uma estilização ou aproximação de transformadores reais, aproximação que não é válida para pulsações ω muito reduzidas e, em particular, em regime estacionário. As relações indicadas são, em circuitos reais, válidas com determinada aproximação, em determinado domínio das grandezas.

ou

2) $\| \Delta X \| = \| T \| \cdot \| F \|$

ou

3) $$\begin{cases} X_{a1} - X_{b1} = T_{11} F_1 + T_{12} F_2 + \ldots \\ \ldots \\ X_{a2} - X_{b2} = T_{21} F_1 + T_{22} F_2 + \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

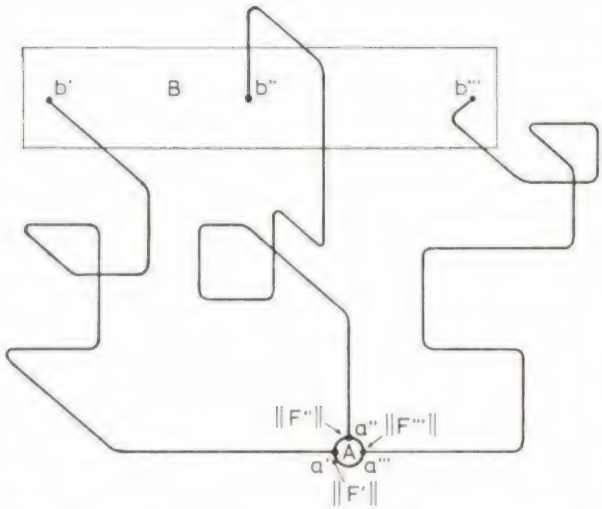


Fig. 4-1 — Tubagens hiperestáticas a' b', a'' b'' e a''' b''' ligando o corpo B, e a união A. As três tubagens são actuadas nos pontos a', a'', a''' por forças generalizadas (forças e momentos) definidas pelas matrizes $\| F' \|$, $\| F'' \|$, $\| F''' \|$.

sendo

$\| X \|$ matriz de coordenadas generalizadas do extremo do ramo, em geral constituída por seis elementos, sendo três as coordenadas cartesianas e três as rotações segundo o mesmo sistema de coordenadas;

$\| F \|$ matriz de forças generalizadas actuando num extremo do ramo, em geral constituída por seis elementos, sendo três as componentes cartesianas da força e três as componentes do momento.

Ter-se-á, ainda,

4) $\| F \| = \| S \| . \| \Delta X \|$,

sendo $\| S \|$ a matriz inversa da matriz $\| T \|$.

Procuremos em primeiro lugar o análogo de cada ramo, considerado isoladamente. Pode ter-se, por exemplo, a representação indicada na fig. 4-2, fazendo corresponder as forças e deslocamentos a correntes, em regime alternado sinusoidal, estando em fase as grandezas do mesmo sinal e em oposição as grandezas de sinal oposto.

Nota-se que, estando todas as correntes alternadas em fase ou oposição, as correntes podem ser tratadas e medidas como grandezas algébricas constantes, abstraindo do seu carácter sinusoidal no tempo [1].

Por comodidade de notação, as correntes análogas de ΔX_i e de F_j são representadas por ΔX_i e F_j, admitindo, naturalmente, factores de «escala» adequados.

Este circuito constitui o análogo de um ramo e impõe entre as doze variáveis das matrizes $\| \Delta X \|$ e $\| F \|$ a relação 2). À parte essa relação, as doze grandezas são livres. Salienta-se que, no análogo, tal como no sistema, há seis relações entre doze grandezas e seis graus de liberdade.

Vejamos, por exemplo, como, a partir deste análogo, se podem determinar imediatamente os 36 elementos da matriz $\| S \|$, isto é, inverter a matriz $\| T \|$. Impondo a corrente

6) $\Delta X_1 = 1$,

e

7) $\Delta X_2 = . . . = \Delta X_6 = 0$,

e tornando livres as 6 «correntes» $F_1, . . . F_6$, curto-circuitando os seis pares de terminais correspondentes, os valores de $F_1, . . . , F_6$ nestas condições são iguais aos elementos de uma coluna da matriz inversa $\| S. \|$ Fazendo, sucessiva e independentemente, igual a 1, $\Delta X_1, . . . , \Delta X_9$, com as restantes variáveis ΔX_i nulas, obtém-se, por medida directa de corrente, os 36 elementos da matriz inversa.

Se, por exemplo, forem impostas três das variáveis F_j e três das variáveis X_i, basta injectar as correntes respectivas nos terminais correspondentes, e curto-circuitar os pares de terminais relativos às outras seis variáveis.

O análogo representa as relações entre as doze variáveis impostas pelo ramo. Essas doze variáveis são doze correntes em pares de terminais,

---

[1] Supondo, por exemplo, todas as grandezas, y_i, da forma

5) $y_i = Y_i \cos (\omega t + \varphi)$,

sendo t o tempo e ω e φ os mesmos para todas as grandezas y_i, o parâmetro Y_i define completamente y_i, podendo constituir o análogo de uma grandeza de carácter algébrico, independente de t. Designa-se, nesta exposição Y_i por «amplitude algébrica» da grandeza sinusoidal y_i, num circuito em corrente alternada em que as tensões e correntes sejam todas da forma 5), estando portanto em fase as do mesmo sinal e em oposição as de sinal contrário.

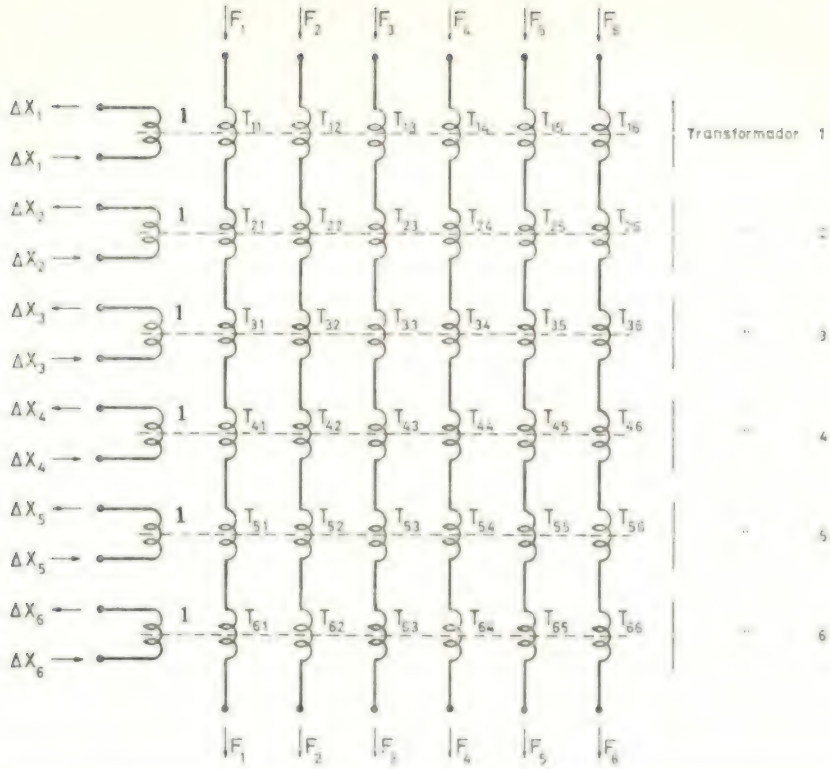


Fig. 4-2 — Análogo de um ramo genérico ab das tubagens representados na fig. 4-1. O análogo é constituído por seis transformadores (ideais), 1 a 6, cada um de sete enrolamentos. Os valores 1, T_{11}, T_{12}..., indicados junto de cada enrolamento, são valores proporcionais aos parâmetros n_k desses enrolamentos. As correntes F_{11}..., F_6 são sinusoidais, de pulsação ω, em fase ou oposição (anulando-se todas simultâneamente) de amplitudes (em sentido algébrico) proporcionais às componentes $F_{11}, \ldots, F_6$ da matriz $\| F \|$ das forças generalizadas que actuam o ramo no ponto a. As correntes $\Delta X_1, \ldots, \Delta X_6$ são correntes sinusoidais de pulsação ω (anulando-se simultâneamente com as correntes F_j) de amplitudes (em sentido algébrico) proporcionais às componentes $\Delta X_1, \ldots, \Delta X_6$ da matriz $\| \Delta X \|$ das deformações generalizadas (diferença entre os deslocamentos generalizados dos pontos a e b) do ramo ab.

que, à parte as relações impostas pelo ramo, são livres. Portanto, a constituição interna do análogo do ramo pode ser ignorada ao compor as condições externas de ligação do ramo ao exterior.

Para essa composição há, agora, que simular as ligações exteriores, de maneira «análoga» às ligações entre os ramos e as forças generalizadas exteriores que os actuam.

Os vários conjuntos de doze pares de terminais do circuito correspondentes a cada ramo devem ser ligados por forma a impor as relações entre os deslocamentos generalizados e forças generalizadas impostas «externamente» pela forma como os ramos estão ligados.

Suponhamos, por exemplo, que é imposta externamente a componente, segundo uma das direcções (relativa ao índice 1 dos elementos das matrizes $\| F \|$) da resultante das forças que actuam as extremidades *a* das barras, isto é, que é imposto externamente o valor

$$8)\ F_1^R = F_1' + F_1'' + F_1'''.$$

A «soma» das componentes F_1 das forças nas três barras, tem por análogo a soma das correntes análogas de F_1', F_1'', F_1'''. Para obter essa soma, basta ligar em paralelo os três pares de terminais correspondentes respectivamente a essas correntes e impor, por meio de um gerador de corrente, que essa soma tenha o valor «análogo» de F_1^R, conforme representado na fig. 4-3.

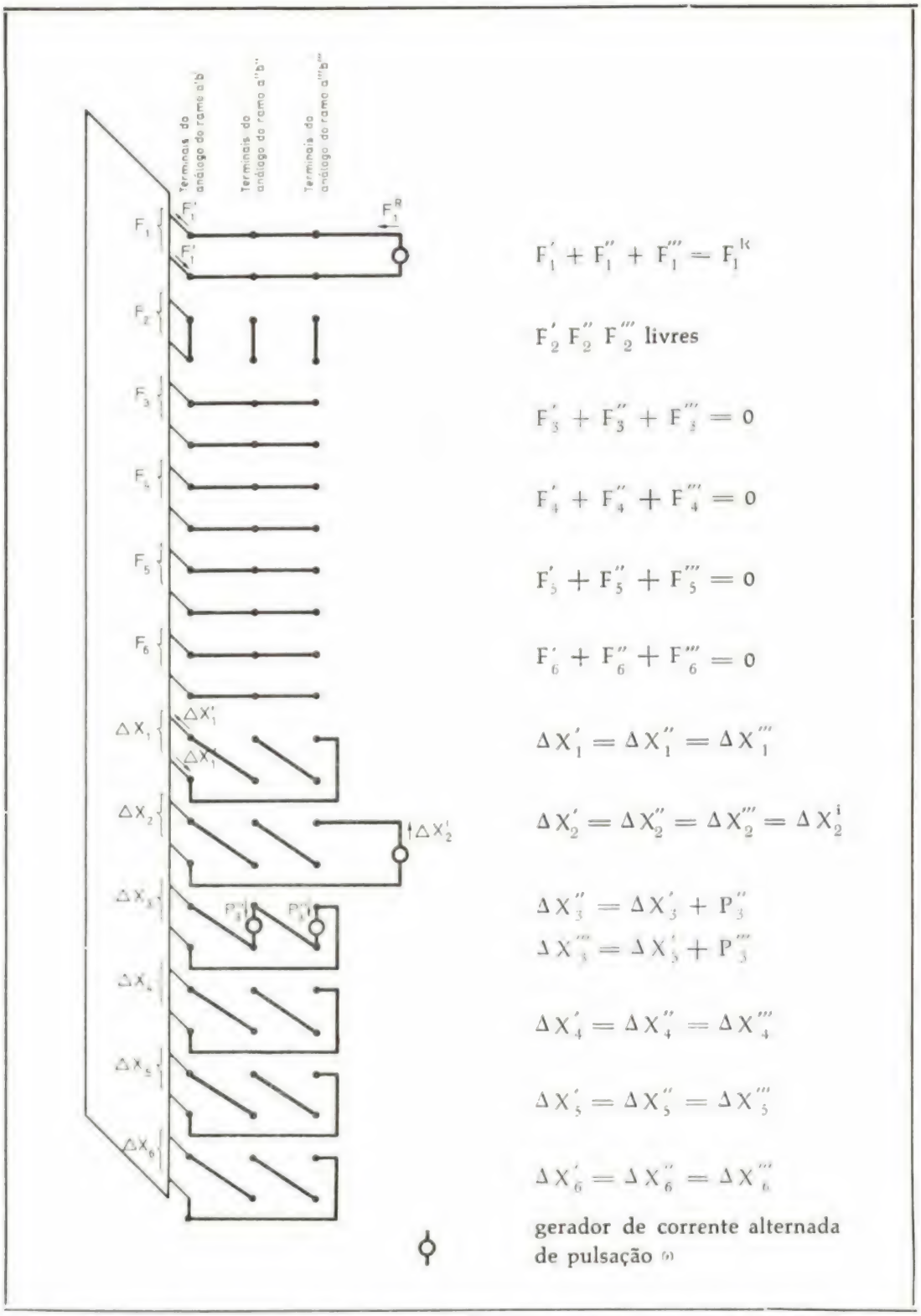


Fig. 4-3 — Análogo do conjunto de tubagens hiperestáticas constituídas pelos ramos a' b', a'' b'', a''' b''' da fig. 4-1. Representação das condições de ligação entre os três ramos. O análogo de cada ramo é considerado, para efeito destas condições de ligação, apenas por meio dos doze pares de terminais correspondentes às seis componentes da matriz de deformações generalizadas $\| \Delta X \|$ e às seis componentes da matriz das forças generalizadas $\| F \|$. Os geradores de corrente relativos às condições impostas não nulas (neste exemplo F_1^R, ΔX_2, P''_3 e P'''_3) são geradores de corrente alternada da mesma pulsação ω e tais que as várias correntes sejam simultâneamente nulas, estando em fase ou oposição (consoante o sentido das grandezas que representam). Por medida das correntes respectivas, obtêm-se directamente os elementos das matrizes $\| \Delta X \|$ e $\| F \|$ relativas aos vários ramos (considerando, naturalmente, os factores de escala adoptados).

Se for imposta a condição de as três componentes da deformação das barras segundo a direcção 1 serem iguais,

$$9)\ \Delta X_1' = \Delta X_1'' = \Delta X_1''',$$

basta impor que as três correntes «análogas» a $\Delta X_1'$, $\Delta X_1''$, $\Delta X_1'''$ sejam iguais, para o que basta ligar em série os três pares de terminais correspondentes, como representado na fig. 4-3.

Na fig. 4-3 representam-se ainda, a título exemplificativo, as ligações relativas às seguintes hipóteses:

a) Componentes segundo uma direcção (representada pelo índice 2) das forças F', F'', F''', livres.

b) Deformações segundo uma direcção (representada pelo índice 2) iguais entre si e iguais a um valor imposto externamente, ΔX_2^i.

c) Componente segundo uma direcção (representada pelo índice 3) da resultante das forças F', F'', F''' iguais a zero.

d) Diferença imposta (por meio de um pré-esforço, por exemplo) entre as deformações dos três ramos, segundo a direcção correspondente ao índice 3.

e) Momento resultante dos momentos actuando nos três ramos (representados pelos elementos de índices 4; 5 e 6 das matrizes $\| F \|$) nulo.

f) Rotações dos três ramos (representadas pelos elementos de índices 4; 5 e 6 das matrizes $\| \Delta X \|$) iguais.

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS DO CÁLCULO ANALÓGICO

Há os seguintes aspectos do estabelecimento do análogo que convém realçar:

1) Decomposição do sistema físico em partes, admitindo cada uma ligada às restantes por variáveis de ligação definidas, neste caso as deformações dos ramos e as forças num nó de ligação, podendo essas variáveis ter valores quaisquer.
2) Consideração de cada uma destas partes como um sistema físico independente, abstraindo das relações entre as variáveis de ligação impostas pelo resto do sistema.
3) Estabelecimento do análogo de cada uma das partes isoladamente.
4) Estabelecimento do análogo das relações entre as variáveis de ligação correspondentes às ligações entre as várias partes, de maneira quase meramente topológica, abstraindo dos condicionamentos impostos por cada uma das partes do sistema.

Em casos simples, estes vários aspectos aparecem misturados, não havendo interesse especial em separá-os.

Em sistemas complexos, no entanto, este método de «corte» do sistema em subsistemas elementares, e consideração separada do comportamento de cada elemento, por um lado, e das relações entre variáveis de ligação, por outro lado, é extremamente importante. O problema das relações entre variáveis de ligação tem em grande parte um carácter topológico que, se devidamente utilizado, se adapta muito bem ao análogo eléctrico. A ligação de dois terminais, por exemplo, é uma forma extremamente simples de impor uma condição topológica.

No que respeita bàsicamente aos circuitos eléctricos, o problema geral deste tipo de métodos, sob os pontos de vista filosófico, físico, topológico, geométrico e matemático, tem sido objecto de análise nos últimos tempos.

Especialmente sob o ponto de vista das aplicações à electricidade, há uma exposição relativamente sistemática de Kron, que usa para o método a palavra «diakoptics», que pretende significar «sistema de cortar».

Não vem ao caso discutir aqui as teorias de Kron; há aliás algumas das suas afirmações de que discordo. De qualquer forma, no entanto é extremamente importante a unificação, ou pelo menos conjugação, para o domínio da física e da técnica, deste tipo de atitude, ou método científico, que, aliás, está de acordo com uma das regras do método de Descartes: dividir a dificuldade em tantas partes quantas as necessárias para separadamente melhor as resolver.

Esta unificação ou conjugação constitui um tema que está em grande parte inexplorado, talvez mais em engenharia mecânica que electrotécnica.

6. ANÁLOGOS DE ALGUNS SISTEMAS MECÂNICOS SIMPLES EM REGIME ESTÁTICO E DINÂMICO

Apresentado o exemplo analisado em 4., com relativa generalidade, passo a indicar alguns

exemplos muito simples de análogos eléctricos de sistemas mecânicos.

a) *Mola linear unidireccional*

Consideremos uma mola linear unidireccional, caracterizada, num espaço a uma dimensão, x, por dois pontos 1 e 2 de coordenadas X_1 e X_2, por forças F, segundo a direcção x, actuando em sentidos opostos nos pontos 1 e 2, e pela relação

$$1) \qquad F = K\,(X_2 - X_1),$$

sendo K, constante, uma característica da mola.

Na fig. 6-1 representa-se um análogo eléctrico, adequado para regime estático da mola, sendo 1 e 2 os terminais de uma resistência R, e U_1 e U_2 as tensões dos terminais 1 e 2 em relação a um terminal de referência de tensões, 0. Em regime estacionário ou em regime alternado simusoidal e com todas as correntes e tensões em fase ou oposição, tem-se a relação

$$2) \qquad I = \frac{1}{R}\,(U_2 - U_1),$$

sendo, no caso de grandezas sinusoidais, I e U as «amplitudes algébricas» das tensões e correntes.

Ter-se-á, portanto, a seguinte correspondência entre as grandezas mecânicas e eléctricas, para o análogo anterior (utilizável, em sistemas complexos, em regime mecânico estático):

Grandeza mecânica	Grandeza eléctrica
deslocamento X	tensão U
força F	corrente I
K	$\frac{1}{R}$
energia elástica	potência vezes $\frac{1}{2}$

Em regime dinâmico, para a sua integração num sistema mecânico complexo, o análogo anterior não é, em geral, adequado, sendo preferíveis outras analogias, uma das quais representada na fig. 6-2.

Sejam v_1 e v_2 as velocidades dos pontos 1 e 2 da mola (segundo a direcção x). Tem-se a relação

$$3) \qquad F = K \int (v_2 - v_1)\,dt.$$

No circuito eléctrico da fig. 6-2 tem-se a relação

$$4) \qquad i = \frac{1}{L} \int (u_2 - u_1)\,dt.$$

Se, na mola, houver uma dissipação de tipo viscoso, caracterizada por uma potência de dissipação da forma

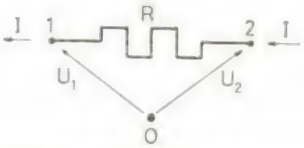
	Mola linear unidireccional	Análogo eléctrico
Simbologia		
Relação entre as grandezas	$F = K\,(X_2 - X_1)$	$I = \frac{1}{R}\,(U_2 - U_1)$
Correspondência entre as grandezas	X F K	U I $\frac{1}{R}$

Fig. 6-1 — Análogo eléctrico de uma mola linear unidireccional em regime estático. As grandezas eléctricas (tensões U_1, U_2 e corrente I) podem ser estacionárias, amplitudes (em sentido algébrico) de grandezas alternadas sinusoidais, todas da mesma frequência e em fase (ou oposição se de sinais contrários), ou valores instantâneos num mesmo instante.

SIEMENS

NOVO SUPERSENSÍVEL DISJUNTOR DE CORRENTE DE DEFEITO

COM INTENSIDADE NOMINAL DE

30 mA

PROTEGE

- pessoas e animais contra tensões de contacto excessivamente elevadas em aparelhagem deficientemente isolada e ligada à terra.
- em caso de interrupção de cabos ou de troca do condutor principal pelo condutor de protecção, ou ainda, troca entre o condutor de protecção e o neutro — sempre, portanto, que uma corrente perigosa passa, através do corpo humano, à terra.

GARANTE

- maiores resistências de terra que nos aparelhos de protecção tradicionais:

  2 160 Ω para V_B (tensão de contacto) = 65 V (protecção para pessoas).
  800 Ω para V_B (tensão de contacto) = 24 V (protecção para animais).
- uma supersensibilidade (dispara para correntes de defeito entre 15 e 30 mA segundo as prescrições VDE 0100) e um poder de corte de 1 500 A, além de uma duração de vida eléctrica de 20 000 manobras à corrente nominal.

Peça catálogos ou esclarecimentos à secção Técnica da

SIEMENS-COMPANHIA DE ELECTRICIDADE, S.A.R.L.

LISBOA-1 — AV. ALMIRANTE REIS, 65 — TEL. 53 69 21/0 • PORTO — RUA DAS CARMELITAS, 26 - 2.º — TEL. 2 89 43/7

DESPOEIRAGEM

FILTROS TECIDOS EM PEÇAS, PANOS, SACOS, MANGAS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.741121
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71497

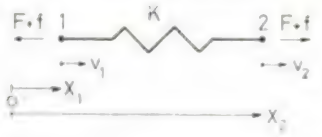
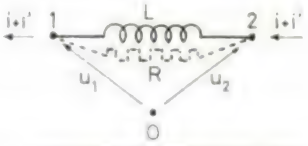
	Mola linear unidireccional	Análogo eléctrico
Simbologia		
Relação entre as grandezas	$F = K \int (v_2 - v_1)\, dt$ $f = B\,(v_2 - v_1)$	$i = \frac{1}{L} \int (u_2 - u_1)\, dt$ $i' = \frac{1}{R}\,(u_2 - u_1)$
Correspondência entre as grandezas	t F f v K B	t i i' u $\frac{1}{L}$ $\frac{1}{R}$

Fig. 6-2 — Análogo eléctrico de uma mola linear unidireccional em regime dinâmico. A resistência R existirá apenas no caso de se considerar um efeito dissipativo na mola, de tipo viscoso. No caso contrário, são nulas f, i', B.

5) $p_m = B\,(v_2 - v_1)^2$,

e por uma força de dissipação da forma

6) $f = B\,(v_2 - v_1)$,

essa dissipação será correctamente representada no análogo por uma resistência R, tendo-se uma potência de dissipação

7) $p = \frac{1}{R}\,(u_2 - u_1)^2$,

e uma corrente (análogo da força) da forma

8) $i' = \frac{1}{R}\,(u_2 - u_1)$.

Portanto, ter-se-á a seguinte correspondência entre as grandezas mecânicas e eléctricas, no análogo dinâmico anterior:

Grandeza mecânica	Grandeza eléctrica
velocidade v	tensão u
força F	corrente i
K	$\frac{1}{L}$
deslocamento X	integral da tensão $\int u dt$
tempo t	tempo t
potência	potência
energia	energia
B	$\frac{1}{R}$

b) *Barra rígida actuada por forças paralelas*

Suponhamos uma barra rígida actuada por forças paralelas, conforme representado nas figs. 6-3 e 6-4, sendo $X_1, \ldots, X_n$ as coordenadas x de n pontos da barra segundo a direcção do deslocamento (aproximadamente ortogonal à barra), $v_1 \ldots, v_n$ as velocidades correspondentes, $M_1, \ldots, M_n$ as massas de troços consecutivos da barra na vizinhança dos n pontos e supostas concentradas

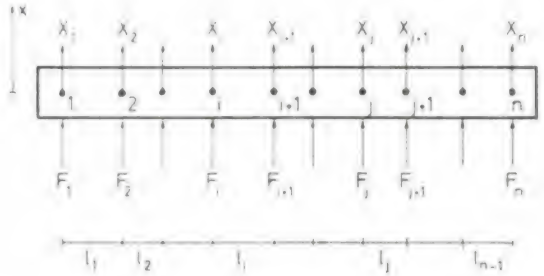
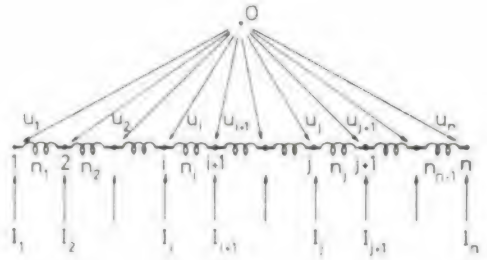
	Barra rígida em equilíbrio estático	Análogo eléctrico
Simbologia		
Relações entre as grandezas	$\frac{X_{i+1}-X_i}{X_{j+1}-X_j}=\frac{l_i}{l_j}$ $l_1 F_2+(l_1+l_2)F_3+\ldots+\left(\sum_{k=1}^{i-1} l^k\right)F_i+\ldots+\left(\sum_{k=1}^{n-1} l^k\right)F_n=0$ $F_1+F_2+\ldots+F_n=0$	$\frac{U_{i+1}-U_i}{U_{j+1}-U_j}=\frac{n_i}{n_j}$ $n_1 I_2+(n_1+n_2)I_3+\ldots+\left(\sum_{k=1}^{i-1} l_k\right)I_i+\ldots+\left(\sum_{k=1}^{n-1} l_k\right)I_n=0$ $I_1+I_2+\ldots+I_n=0$
Correspondência entre as grandezas	X F $\frac{l_i}{l_j}$	U I $\frac{n_i}{n_j}$

Fig. 6-3 — Análogo de uma barra rígida actuada por forças paralelas, em regime estático.

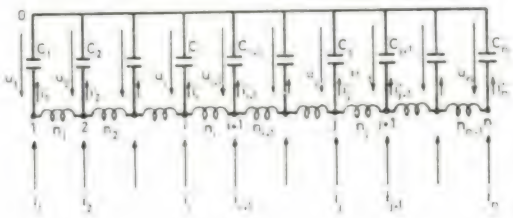
	Barra rígida em regime dinâmico	Análogo eléctrico
Simbologia		
Relações entre as grandezas	$\frac{X_{i+1}-X_i}{X_{j+1}-X_j}=\frac{l_i}{l_j}$ $F_i'=M_i\frac{dv_i}{dt} \qquad (i=1;2;\ldots;n)$ $l_1(F_2-F_2')+(l_1+l_2)(F_3-F_3')+\ldots+\left(\sum_{k=1}^{i-1} l_k\right)(F_i-F_i')+\ldots+$ $+\left(\sum_{k=1}^{n-1} l_k\right)(F_n-F_n')=0$ $F_1-F_1'+F_2-F_2'+\ldots+F_n-F_n'=0$	$\frac{u_{i+1}-u_i}{u_{j+1}-u_j}=\frac{n_i}{n_j}$ $i_i=C_i\frac{du_i}{dt} \qquad (i=1;2;\ldots;n)$ $n_1(i_2-i_2'+(n_1+n_2)(i_3-i_3')+\ldots+\left(\sum_{k=i}^{i-1} l_k\right)(i_i-i_i')+\ldots+$ $+\left(\sum_{k=1}^{n-1} l_k\right)(i_n-i_n')=0$ $i_1-i_1'+i_2-i_2'+\ldots+i_n-i_n'=0$
Correspondência entre as grandezas	v x t F M F' $\frac{l_i}{l_j}$	u $\int u\,dt$ t i C i' $\frac{n_i}{n_j}$

Fig. 6-4 — Análogo de uma barra rígida actuada por forças paralelas, em regime dinâmico.

neles, e $F_1, \ldots, F_n$ forças paralelas à direcção x actuando nos n pontos.

Suponhamos em primeiro lugar a barra em equilíbrio estático. Ter-se-á, com a notação da fig. 6-3,

$$9)\quad \frac{X_{i+1}-X_i}{X_{j+1}-X_j}=\frac{l_i}{l_j} \qquad (i,j=1;2;\ldots;n-1)$$

$$10)\quad l_1F_2+(l_1+l_2)F_3+\ldots+\left(\sum_{k=1}^{i-1} l_k\right)F_i+ \\ +\ldots+\left(\sum_{k=1}^{n-1} L_k\right)F_n=0$$

$$11)\quad F_1+F_2+\ldots+F_i+\ldots+F_n=0.$$

Consideramos um transformador ideal de n-1 enrolamentos, ligados em série, conforme se indica na fig. 6-3, e a notação das tensões e correntes indicada na mesma figura. Suponhamos todas as correntes e tensões alternadas sinusoidais, de pulsação ω, anulando-se simultâneamente todas as grandezas, que estarão em fase se do mesmo sinal e em oposição se de sinal contrário.

Sejam U_i e I_j as amplitudes (em sentido algébrico) das tensões e correntes indicadas. Ter-se-á

$$12)\quad \frac{U_{i+1}-U_i}{U_{j+1}-U_j}=\frac{n_i}{n_j}$$

$$13)\quad n_1I_2+(n_1+n_2)I_3+\ldots+\left(\sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)I_i+ \\ +\ldots+\left(\sum_{k=1}^{n-1} n_k\right)I_n=0$$

$$14)\quad I_1+I_2+\ldots+I_i+\ldots+I_n=0.$$

Pode, assim, estabelecer-se a seguinte correspondência entre as grandezas do sistema mecânico, em equilíbrio estático, e as grandezas do análogo eléctrico (em regime alternado sinusoidal):

Grandeza mecânica	Grandeza eléctrica
deslocamento X	tensão U
força F	corrente I
relação de braços $\frac{l_i}{l_j}$	relação de transformação $\frac{n_i}{n_j}$

Suponhamos agora a barra em regime dinâmico, e seja v_i a velocidade de um ponto genérico i (segundo a direcção x),

$$15)\quad v_i=\frac{dX_i}{dt}.$$

Ter-se-á, com a notação da fig. 6-4,

$$16)\quad \frac{X_{i+1}-X_i}{X_{j+1}-X_j}=\frac{l_i}{l_j} \qquad (i,j=1;2;\ldots;n-1)$$

$$17)\quad F'_i=M_i\frac{dv_i}{dt} \qquad (i=1;2;\ldots;n)$$

$$18)\quad l_1(F_2-F'_2)+(l_1+l_2)(F_3-F'_3)+\ldots+ \\ +\left(\sum_{k=1}^{i-1} l_k\right)(F_i-F'_i)+\ldots+ \\ +\left(\sum_{k=1}^{n-1} l_k\right)+(F_n-F'_n)=0.$$

$$19)\quad F_1-F'_1+F_2-F'_2+\ldots+F_n-F'_n=0.$$

Consideremos o análogo eléctrico representado na fig. 6-4, constituído por um transformador de n-1 enrolamentos e n capacidades $C_1, \ldots, C_n$. Tem-se, com a notação da mesma figura,

$$20)\quad \frac{u_{i+1}-u_i}{u_{j+1}-u_j}=\frac{n_i}{n_j} \qquad (i,j=1;\ldots;n-1)$$

$$21)\quad i'_i=C_i\frac{du_i}{dt} \qquad (i,j=1;\ldots;n-1)$$

$$22)\quad n_1(i_2-i'_2)+(n_1+n_2)(i_3-i'_3)+\ldots+ \\ +\left(\sum_{k=1}^{i-1} n_k\right)(i_i-i'_i)+\ldots+\left(\sum_{k=1}^{n-1} n_k\right)(i_n-i'_n)=0$$

$$23)\quad i_1-i'_1+i_2-i'_2+\ldots+i_n-i'_n=0.$$

Portanto, pode estabelecer-se a seguinte correspondência entre as grandezas do sistema mecâ-

nico em regime dinâmico e as grandezas do análogo eléctrico:

Grandeza mecânica	Grandeza eléctrica
velocidade v	tensão u
deslocamento x	$\int u dt$
tempo t	tempo t
força F	corrente i
massa M	capacidade C
força F'	corrente i'
aceleração $\frac{dv}{dt}$	$\frac{du}{dt}$
relação de braços $\frac{l_i}{l_j}$	relação de transformação $\frac{n_i}{n_j}$
potência	potência
energia	energia

c) *Combinação dos exemplos a e b*

Quer no caso de regime estático quer no de regime dinâmico, a correspondência entre as grandezas mecânicas e eléctricas nos exemplos a e b é a mesma. Consequentemente, podem obter-se análogos de sistemas constituídos por combinação de barras rígidas e molas, compondo os respectivos análogos e impondo as relações adequadas entre as variáveis de ligação respectivas.

Seja, por exemplo o caso de uma barra actuada por três molas e por uma força exterior F no ponto 1, conforme representado esquemàticamente nas figs. 6-5 e 6-6. Têm-se, respectivamente em regime estático e dinâmico, os análogos indicados nessas duas figuras. No caso estático, a força exterior F é simulada por um gerador de corrente alternada siunsoidal, de amplitude complexa F. No caso dinâmico, F é simulada por um gerador de corrente variando no tempo de maneira análoga a F (à parte o factor de escala dos tempos do sistema mecânico e do análogo eléctrico e o factor de escala de conversão de forças no sistema mecânico em correntes no análogo).

7. ANÁLOGOS DE UMA VIGA EM REGIME ESTÁTICO E DINÂMICO

Consideremos uma viga actuada por forças unidireccionais paralelas entre si e perpendi-

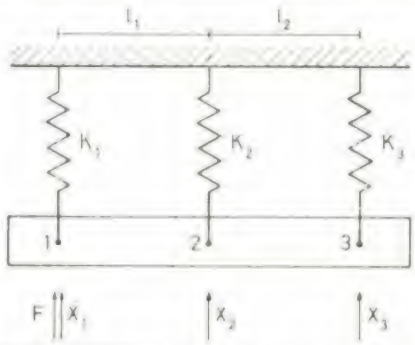
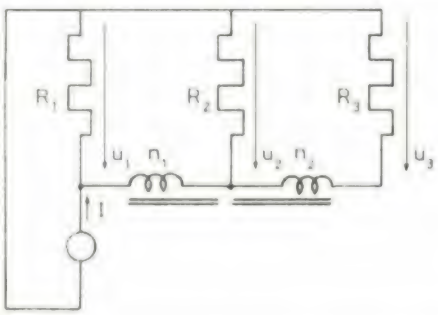
	Sistema mecânico (em regime estático)	Análogo eléctrico
Simbologia		
Correspondência entre as grandezas	$\frac{l_1}{l_2}$ K_i X_i F	$\frac{n_1}{n_2}$ $\frac{1}{R_i}$ U_i I

Fig. 6-5 — Análogo de um sistema constituído por uma barra rígida e três molas, actuando por uma força, em regime estático.

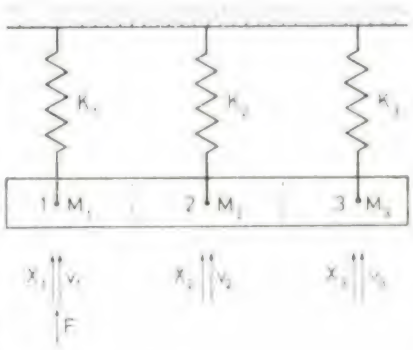
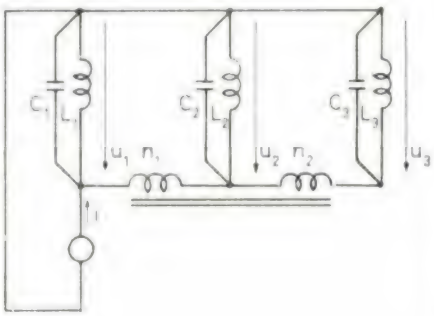
	Sistema mecânico (em regime dinâmico)	Análogo eléctrico
Simbologia		
Correspondência entre as grandezas	$\frac{l_1}{l_2}$ K_i M_i v_i X_i t F	$\frac{n_1}{n_2}$ $\frac{1}{L_i}$ C_i u_i $\int u_i \, dt$ t i

Fig. 6-6 — Análogo de um sistema constituído por uma barra rígida e três molas, actuado por uma força, em regime dinâmico.

culares à viga. Para concretizar, suponhamos o caso representado na fig. 7-1 a.

Consideremos uma estilização da viga, assimilando-a a um conjunto de peças rígidas em

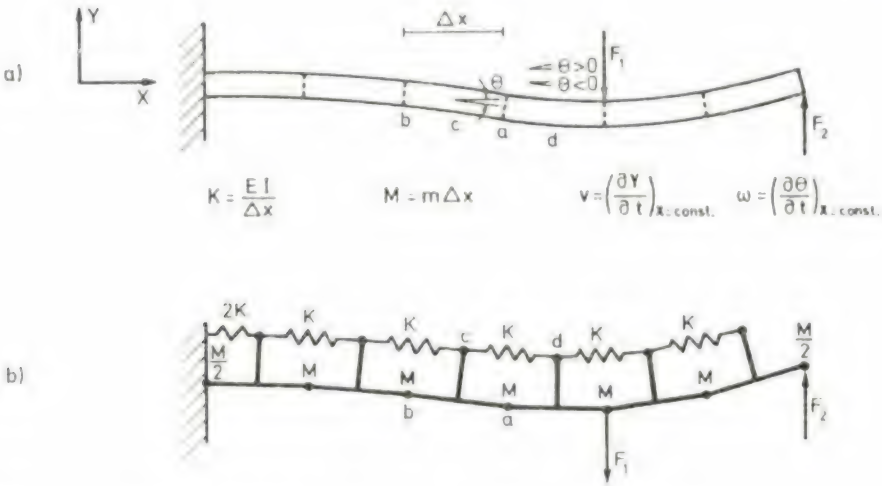


Fig. 7-1 *a*) Viga actuada por forças unidireccionais paralelas entre si e perpendiculares à viga.
b) Estilização da viga, assimilando-a a um conjunto de peças rígidas em forma de T, articuladas entre elas, ligadas por molas, supondo concentradas nas articulações as massas de troços da viga.

forma de T, articuladas entre elas, e ligadas por molas, supondo concentradas nas articulações as massas M de troços da viga correspondentes a um invervalo Δx, conforme representado na fig. 7-1 b. Esta estilização corresponde, como se verifica fàcilmente, a uma aproximação por diferenças finitas das equações diferenciais da viga, para pequenas deformações.

Na fig. 7-2 e 7-3 representam-se os análogos do comportamento de uma das peças rígidas em

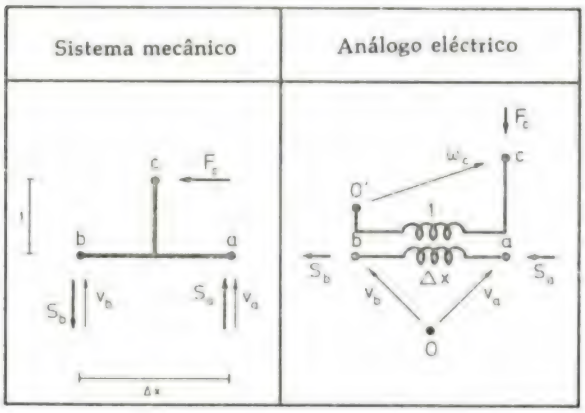


Fig. 7-2 — Análogo do comportamento de uma das peças rígidas em T da estilização da viga indicada na fig. 7-1 b, em regime estático. Os pontos a e b são as articulações do T aos dois T consecutivos e c é a ligação às molas que ligam o T aos dois T consecutivos. S_a e S_b representam as forças transversais nas secções a e b da viga referidas ao troço a b e $F_c \cdot 1$ (sendo 1/a unidade de comprimento) representa a momento flector na secção c (intermédia entre as secções a e b). Os deslocamentos dos pontos a e b segundo Y são representados por Y_a e Y_b.
O análogo é constituído por um transformador ideal de dois enrolamentos, de relação de transformação $1 : \Delta x$, em regime alternado sinusoidal, estando todas as tensões e correntes em fase, ou oposição, consoante os seus sinais relativos. As grandezas S_a, S_b, F_c têm como análogos as amplitudes algébricas das correntes S_a, S_b, F_c e as grandezas Y_a, Y_b, Θ_c, as amplitudes algébricas das tensões Y_a, Y_b, Θ_c (em relação a um nó de referência, O, no que respeita a Y_a e Y_b).
O análogo traduz as relações:

$$\frac{Y_a - Y_b}{\Delta x} = \Theta_c$$

$$S_a = S_b$$

$$F_c . 1 = \frac{S_a + S_b}{2} . \Delta x \quad .$$

T, em regime estático e dinâmico, constituído um transformador de dois enrolamentos. Na

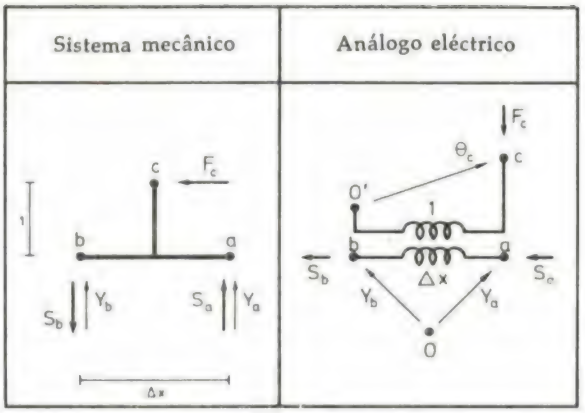


Fig. 7-3 — Análogo do comportamento de uma das peças rígidas em T da estilização da viga indicada na fig. 7-1 b, em regime dinâmico. Os pontos a e b são as articulações do T aos dois T consecutivos e c é a ligação às molas que ligam o T aos dois T consecutivos. S_a e S_b representam as forças transversais nas secções a e b da viga referidas no troço ab e $F_c \cdot 1$ (sendo 1 a unidade de comprimento) representa o momento flector na secção c (intermédia entre as secções a e b). As velocidades dos pontos a e b segundo Y são representadas por Y_a, e Y_b.
O análogo é constituído por um transformador ideal de dois enrolamentos de relação de transformação $1 : \Delta x$, em regime não estacionário. As grandezas S_a, S_b, F_c têm como análogo os valores instantâneos das correntes S_a, S_b, F_c e as grandezas v_a, v_b, ω_c os valores instantâneos das tensões v_a, v_b, ω_c (em relação a um nó de referência, O, no que respeita a v_a e v_b).
O análogo traduz as relações

$$\frac{v_a - v_b}{\Delta x} = \omega_c$$

$$S_a = S_b$$

$$F_c . 1 = \frac{S_a + S_b}{2} . \Delta x .$$

fig. 7-4 representa-se o análogo do comportamento de uma mola da estilização da viga, em regime estático, constituído por uma resistência, e na fig. 7-5 o análogo em regime dinâmico, constituído por uma indução. Na fig. 7-6 representa-se o análogo do comportamento da massa de um troço de viga, suposta concentrada na articulação de duas peças rígidas em T, em regime dinâmico. Para facilidade de notação, as tensões, correntes, e relações de transformação são representadas com a mesma notação das grandezas mecânicas de que são análogas.

Na fig. 7-7 representa-se o análogo da viga, em regime estático. As forças F_1 e F_2 são simuladas por dois geradores de corrente alternada

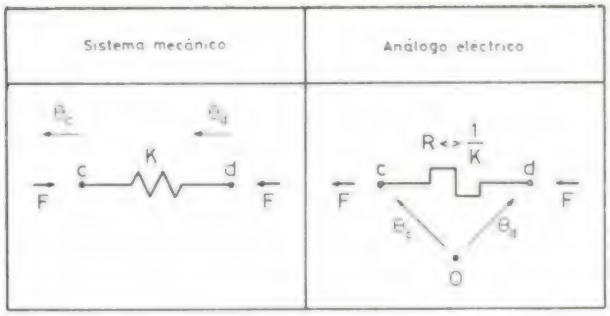


Fig. 7-4 — Análogo do comportamento de uma mola da estilização da viga indicada na fig. 7-1b, em regime estático. Θ_c e Θ_d representam os valores de Θ nas secções c e d da viga e F.l (sendo 1 a unidade de comprimento) o momento fletor no ponto a, intermédio entre os pontos c e d. O análogo é constituído por uma resistência em regime alternado sinusoidal, estando todas as tensões e correntes em fase, ou oposição, consoante os seus sinais relativos. As grandezas Θ_c e Θ_d têm como análogos as amplitudes algébricas das tensões Θ_c e Θ_d, em relação a um nó de referência, Θ, e a grandeza F (ou F.l) a amplitude algébrica da corrente F (ou F.l). O análogo traduz a relação

$$F.l = K.\ (\Theta_d - \Theta_c).$$

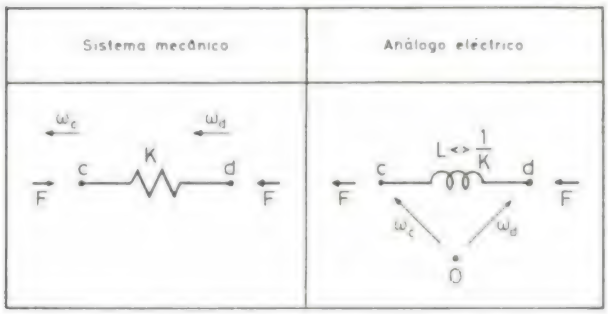


Fig. 7-5 — Análogo do comportamento de uma mola da estilização da viga indicada na fig. 7-1b, em regime dinâmico ω_c e ω_d representam os valores de ω_c e ω_d nas secções c e d da viga e F.l (sendo 1 a unidade de comprimento) o momento flector no ponto a, intermédio entre os pontos c e d. O análogo é constituído por uma indução. As grandezas ω_c e ω_d têm como análogos os valores instantâneos das tensões ω_c e ω_d, em reladão a um nó de referência, O, e a grandeza F (ou F.l) o valor instantâneo da corrente F (ou F.l). O análogo traduz a relação

$$F.l = K \int (\omega_d - \omega_c)\ dt.$$

sinusoidal (anulando-se simultâneamente), de amplitudes algébricas F_1 e F_2. A condição de encastramento no apoio é simulada impondo o anulamento das tensões análogas de Y e Θ no ponto de encastramento.

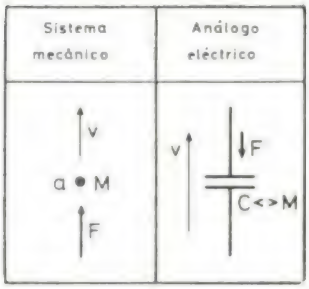


Fig. 7-6 — Análogo do comportamento da massa de um troço da viga segundo a estilização indicada na fig. 7-1b, em regime dinâmico. A grandeza v representa a velocidade da massa M, suposta concentrada na secção a, segundo a direcção Y, e F a força de aceleração correspondente. No análogo v é representada pela tensão v e F pela corrente F.
O análogo traduz a relação

$$F = M \frac{dv}{dt}$$

Em regime estático F é nula, não sendo necessário incluir as massas M no análogo.

Tem-se a seguinte correspondência entre as grandezas do sistema mecânico e do análogo eléctrico:

Grandeza mecânica	Grandeza eléctrica
deslocamento Y	tensão Y
deslocamento angular Θ	tensão Θ
$K = \frac{EI}{\Delta x}$	$\frac{1}{R}$
força F	corrente F
força transversal S	corrente S

Na fig. 7-8 representa-se o análogo da viga, em regime dinâmico. As forças F_1 e F_2 são simuladas por geradores de corrente tais que a corrente varie em função do tempo de maneira análoga a F_1 e F_2.

Tem-se a seguinte correspondência entre as grandezas do sistema mecânico e do análogo eléctrico (Ver Quadro na página seguinte).

No caso de haver dissipação de tipo «viscoso» dependente da velocidade v, essa dissipação pode ser representada no análogo por resistências em paralelo com as capacidades. Se houver dissipação de tipo viscoso dependente da velocidade angular ω, essa dissipação pode ser representada no análogo por resistências em paralelo com as induções.

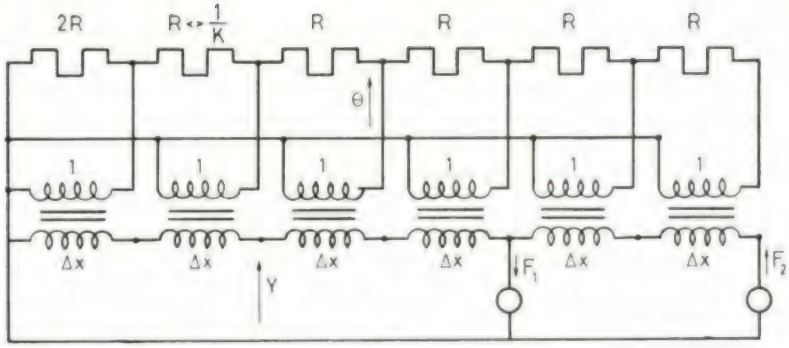


Fig. 7-7 — Análogo da viga representada na fig. 7-1, em regime estático. Este análogo resulta da composição dos análogos dos vários elementos da estilização do comportamento da viga indicados na fig. 7-1b. As forças exteriores F_1 e F_2 são simuladas por geradores de corrente alternada sinusoidal (de igual frequência e anulando-se simultâneamente) gerando correntes de amplitudes algébricas F_1 e F_2. A condição de encastramento é simulada impondo o anulamento de Θ e Y nos pontos correspondentes à secção de encastramento.

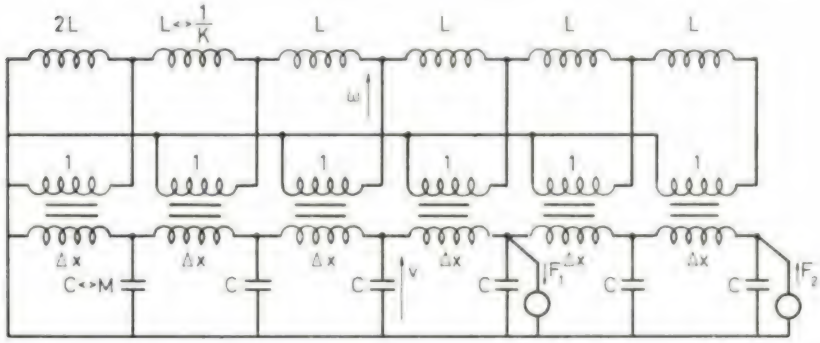


Fig. 7-8 — Análogo da viga representada na fig. 7-1, em regime dinâmico. Este análogo resulta da composição dos análogos dos vários elementos da estilização do comportamento da viga indicados na fig. 7-1b. As forças exteriores F_1 e F_2 são simuladas por geradores de corrente tais que as correntes respectivas variem no tempo de maneira análoga a F_1 e F_2. A condição de encastramento é simulada impondo o anulamento de v e ω nos pontos correspondentes à secção de encastramento.

Grandeza mecânica	Grandeza eléctrica
velocidade $v = \frac{dY}{dt}$	tensão v
deslocamento $Y = \int v\,dt$	$\int v\,dt$
velocidade angular $\omega = \frac{d\Theta}{dt}$	tensão ω
deslocamento angular Θ	$\int \omega\,dt$
$K = \frac{EI}{\Delta x}$	$\frac{1}{L}$
relação $\frac{\Delta x}{l}$ de braços do T rígido	relação de transformação $\frac{\Delta x}{l}$
massa $M = m\,\Delta x$	capacidade C
força F	corrente F
força transversal S	corrente S
tempo	tempo
potência	potência
energia	energia

8. ANÁLOGO DE UMA BARRA SUBMETIDA A TORÇÃO

Consideremos uma barra submetida a torção, em regime dinâmico, conforme representado esquemàticamente na fig. 8-1.

A equação de deformação é

$$1)\quad M(x) + \frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right] = I(x)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2},$$

sendo α a deformação angular, t o tempo, e K um parâmetro de rigidez de torção, I o momento de inércia e M o momento de torção exterior, por unidade de comprimento (no que respeita a K, I e M).

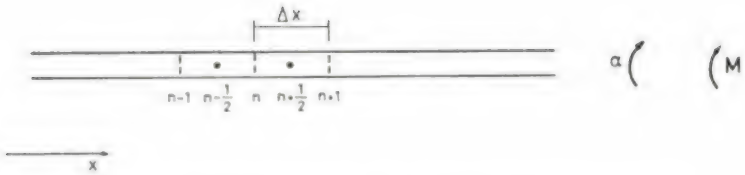


Fig. 8-1 — Representação de uma barra submetida a torção

A esta equação diferencial corresponde, sob a forma de diferenças finitas, a equação

$$2)\quad M_n \Delta x + \frac{K_{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \frac{K_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \cong I_n \Delta x \frac{\partial^2 \alpha_n}{\partial t^2},$$

sendo

$$1;\ 2;\ \ldots;\ n-1;\ n;\ n+1;\ \ldots$$

índices identificadores de uma sucessão de secções da barra à distância Δx e $n + \frac{1}{2}$ índice identificativo de um ponto intermédio entre as secções n e n+1.

Sob outra forma, naturalmente equivalente à anterior, pode considerar-se uma estilização da barra, representada na fig. 8-2, supondo-a constituída por discos à distância Δx nos quais se suponha concentrada a inércia de um troço Δx da barra ($I_n \Delta x$), sendo dois discos consecutivos, relativos às secções n e n+1, ligados entre si por uma mola de torção, caracterizada por um factor $\frac{K_{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}$ de proporcionalidade entre a diferença de deslocamentos angulares nos extremos da mola e o binário de torção da mola.

Consideremos o análogo representado na fig. 8-3, constituído por induções em série e

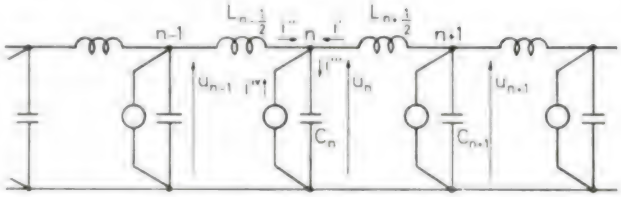


Fig. 8-3 — Análogo de uma barra submetida a torção, em regime dinâmico. As correntes i^{IV}, obtidas por meio de geradores de corrente, são os análogos de

$$\int M_n \Delta x \, dt,$$

sendo M_n o momento de torção exterior que actua um troço Δx da barra na vizinhança do ponto n. A tensão u_n é o análogo do deslocamento angular, α, na secção n da barra.

capacidades em derivação, com a notação das grandezas aí indicada.

Tem-se

$$3)\quad i^{IV} + i^{I} + i^{II} = i^{III},$$

donde

$$4)\quad \frac{di^{IV}}{dt} + \frac{di^{I}}{dt} + \frac{di^{II}}{dt} = \frac{di^{III}}{dt}.$$

Ora,

$$5)\quad \frac{di^{I}}{dt} = \frac{1}{L_{n+\frac{1}{2}}}(u_{n+1} - u_n)$$

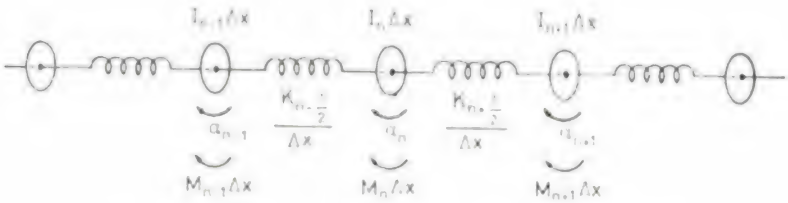


Fig. 8-2 – Estilização de uma barra submetida a torção.

6) $$\frac{d\,i^{II}}{d\,t} = \frac{1}{L_{n-\frac{1}{2}}}\,(u_{n-1} - u_n)$$

7) $$\frac{d\,i^{III}}{d\,t} = C_n\,\frac{d^2\,\alpha_n}{d\,t^2}.$$

Portanto, se se estabelecer a correspondência

8) $u <> \alpha$

9) $\frac{d\,t^{IV}}{d\,t} <> M_n\,\Delta x$

10) $i^{IV} <> \int M_n\,\Delta x \;\; d\,t$

11) $C_n <> I_n\,\Delta x$

12) $L_{n+\frac{1}{2}} <> \frac{\Delta x}{K_{n+\frac{1}{2}}}$

13) $t <> t,$

ter-se-á, para o análogo eléctrico, e com a mesma correspondência de grandezas, uma equação idêntica a 2).

Se, por exemplo, se quiser simular o efeito dinâmico de um momento $M_n\,\Delta x$ aplicado na vizinhança da secção n da barra, entre o tempo t_1 e t_2, conforme indicado na fig. 8-4a, haverá que, no análogo, considerar um gerador de corrente i_n^{IV}, variando a corrente no tempo conforme indicado na fig. 8-4b (supondo igual escala de tempos no sistema mecânico e no análogo).

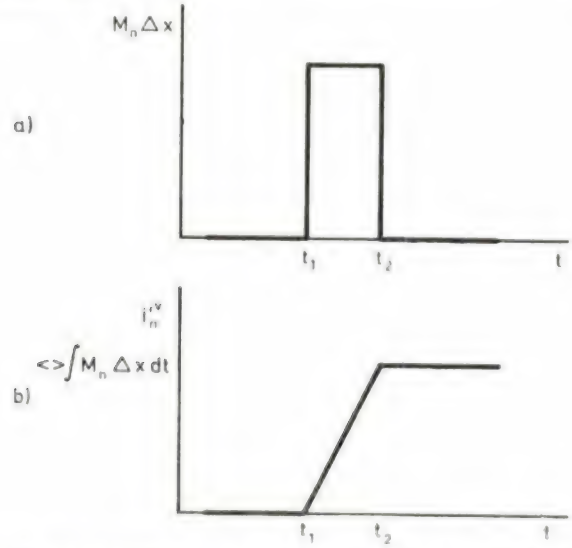


Fig. 8-4 — Exemplo de relação entre a variação no tempo do momento de torção exterior, $M_n\,\Delta x$, aplicando a um troço Δx da barra na vizinhança do ponto n, e a variação no tempo da corrente i^{IV} correspondente, no análogo.

9. REGIMES LIVRES. FREQUÊNCIAS PRÓPRIAS. REPRESENTAÇÃO MODAL. ANÁLISE DE VIBRAÇÕES.

Suponhamos que se pretende conhecer o regime livre de um sistema mecânico em determinadas condições, por exemplo, partindo do repouso, em consequência de uma perturbação impulsiva ou de uma perturbação escalão de determinada grandeza.

Para concretizar, suponhamos o caso de uma viga, analisado em 7., e que se pretende conhecer o regime livre consequente à aplicação impulsiva de uma força em determinado ponto (fig. 9-1a). Aplicando no modelo eléctrico, análogo do sistema mecânico em regime dinâmico, por meio do gerador de corrente análoga dessa força, um impulso de corrente, têm-se reproduzidas as condições causadoras do regime livre. Registando, por exemplo oscilogràficamente, as várias grandezas eléctricas, têm-se, em função do tempo, os análogos das várias grandezas que caracterizam o regime livre.

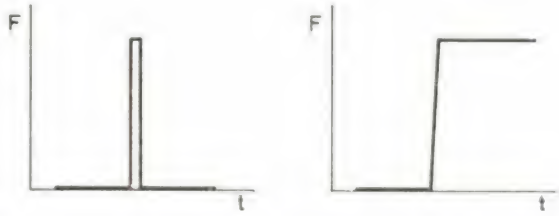


Fig. 9-1 — Exemplos de variação no tempo de excitações para as quais se pretendam analisar regimes livres:

a) Força de tipo impulsivo.
b) Força de tipo escalão.

Suponhamos agora que se pretende determinar a resposta do sistema mecânico a uma exitação sinusoidal, de frequência f e pulsação ω, em função de f, ou de ω.

Aplicando, ao análogo eléctrico do sistema dinâmico, o análogo dessa excitação, tem-se, para determinada frequência f, por medida das grandezas eléctricas análogas, a resposta do sistema para esse valor de f. Variando a frequência podem obter-se, em função de f, as grandezas que se pretenda determinar.

Tem, por vezes, particular interesse, a determinação das frequências próprias do sistema. No caso de sistemas não dissipativos, tem-se, para as frequências próprias, uma relação infinita entre

a «resposta» do sistema (caracterizada por determinada grandeza, por exemplo uma velocidade) e a «excitação» (caracterizada por determinada grandeza, por exemplo uma força). Como, pràticamente, há alguma dissipação, essa relação não é infinita, mas muito elevada. As frequências próprias corresponderão assim, muito aproximadamente, a máximos relativos da «resposta», tendo a «excitação» amplitude constante e frequência variável.

Seja, por exemplo, o caso representado na fig. 9-2. As frequências próprias do sistema são F_1, F_2, F_3, F_4.

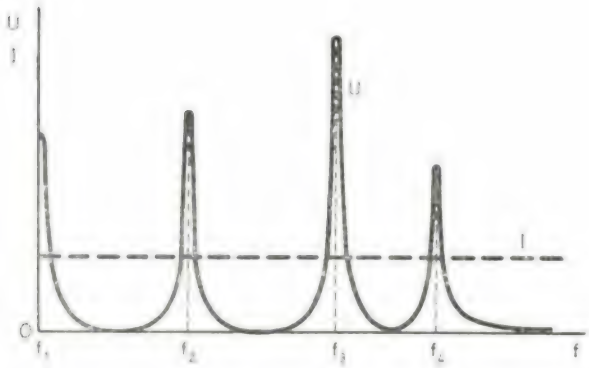


Fig. 9-2 — Representação, em função da frequência f, da relação entre a excitação, caracterizada por exemplo por uma força com uma única componente não nula tendo por análogo uma corrente de amplitude I, e a resposta do sistema, caracterizada por exemplo por uma velocidade com uma única componente não nula tendo por análogo uma tensão de amplitude U.

No caso de sistemas de parâmetros distribuídos, a sua representação por um número finito de circuitos de parâmetros concentrados introduz um erro, equivalente à aproximação das diferenças finitas, erro em geral crescente com a frequência. Há, assim, uma frequência máxima, para a qual, com determinada aproximação, é válido um determinado número finito de elementos. Em ordem de grandeza, há necessidade de considerar uma subdivisão em pelo menos cerca de 10 elementos por comprimento de onda, para as frequências do espectro das grandezas que interesse considerar com razoável aproximação.

Nota-se que, muitas vezes, é possível aperfeiçoar o critério de definição e correspondência das zonas do sistema de parâmetros distribuídos representados por elementos de parâmetros concentrados, reduzindo os erros resultantes de quantificação, ou, o que é o mesmo, conseguindo igual precisão com menos elementos.

Consideremos um sistema mecânico e uma parte do mesmo, constituindo um subsistema passivo, ligado ao resto do sistema apenas por um ponto de ligação e pela força exercida nesse ponto.

Nessas condições, para efeito do sistema em conjunto, interessa apenas representar o subsistema pela relação entre a força e o deslocamento ou a velocidade do ponto de ligação, ou, no análogo, por exemplo a relação entre a corrente e a tensão num par de terminais, na hipótese de ser suficiente considerar apenas uma componente do deslocamento e uma componente da força.

No caso de um subsistema não dissipativo, para efeitos do par de terminais que, nessa hipótese, caracteriza as variáveis de ligação, o análogo do subsistema pode ser substituído, por exemplo, por um circuito do tipo do representado na fig. 9-3, correspondendo a capacidade C, à frequência própria «nula» (deslocamento do subsistema em conjunto sem deformação) e tendo

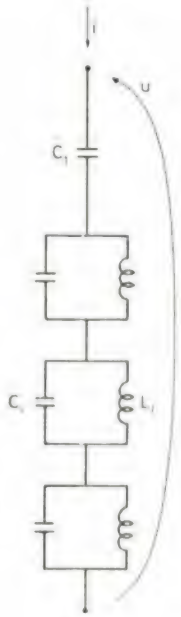


Fig. 9-3

os sucessivos paralelos indução-condensador frequências de ressonância correspondentes às frequências próprias do sistema mecânico. Desta forma, se for suficiente considerar n frequências próprias do subsistema, para efeitos do análogo do sistema conjunto o subsistema pode ser representado com um circuito constituído apenas

por n (ou n-1) induções e n capacidades. Essas induções e capacidades são definidas, a menos de um factor de proporcionalidade, pelos pólos e zeros da relação entre a resposta e a excitação do subsistema. Esses pólos e zeros verificam-se para frequências reais se o subsistema for não dissipativo.

Na hipótese de não ser suficiente considerar apenas uma componente do deslocamento e uma componente da força, para a interacção entre o subsistema e o resto do sistema, e no caso de o subsistema, sendo passivo, ser actuado em mais de um ponto, ele pode ser considerado, para efeitos do sistema conjunto, por meio de um análogo do tipo representado na fig. 9-4, correspondendo as correntes F_i às várias forças da interligação, a capacidade de C_1 à «frequência própria» nula, e as frequências de ressonância dos vários paralelos indução-capacidade às várias frequências próprias do sistema mecânico. Associam-se, directamente, desta forma, os elementos do análogo eléctrico aos «modos» do sistema mecânico.

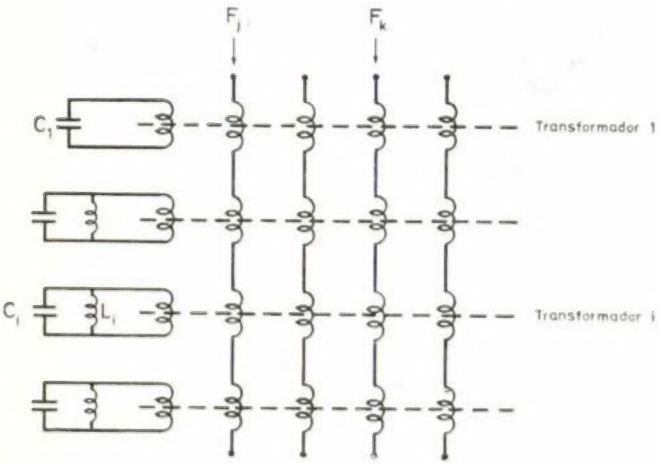


Fig. 9-4

10. ANÁLOGOS DE ELEMENTOS NÃO LINEARES

Há, por vezes, necessidade de considerar relações não lineares. Na generalidade dos casos, se não se pretender grande rigor na sua representação, é possível obter análogos simples que traduzam a não linearidade. Para relações complexas e em que se pretenda grande rigor, a obtenção do análogo pode exigir soluções relativamente elaboradas ou de custo apreciável.

O elemento não linear mais simples e mais utilizado é constituído pelo díodo que, estilizadamente e em determinadas condições, é caracterizado por uma relação entre a corrente num par de terminais e a tensão entre esses terminais do tipo da indicada na fig. 10-1. Nalguns díodos são utilizáveis os ramos A e B dessa relação, noutros, também o ramo C. São representados os primeiros pela forma indicada na fig. 10-1 a, os segundos na fig. 10-1 b.

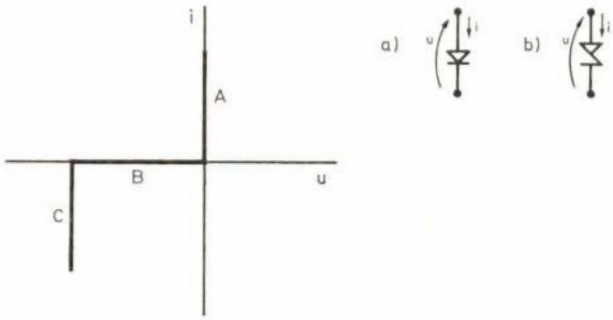


Fig. 10-1 — Característica ideal de um díodo, sendo i a corrente nos seus terminais (em sentidos opostos) e u a tensão entre os seus dois terminais.

a) Representação esquemática de um díodo utilizável nos ramos A e B da sua característica.

b) Representação esquemática de um díodo utilizável nos ramos A, B e C da sua característica.

Apresento a título ilustrativo, três exemplos muito simples de análogos utilizando díodos.

a) *Mola não linear em regime estático*

Consideremos uma mola não linear em regime estático, com a relação entre a força F e a deformação X indicada na fig. 10-2. Em regime estacionário, fazendo corresponder a força à corrente I e a deformação à tensão U, ter-se-á o análogo indicado na fig. 10-3.

Para tensões compreendidas entre U_1 e U_2 um de cada par de díodos em série do análogo (D_1 e D_2, e D_3 e D_4) encontra-se no ramo B da sua característica (fig. 10-1), sendo nulas as correntes I'' e I''', e a relação entre a tensão U e a corrente I é definida por R_1. Para tensões compreendidas entre U_1 e U_2 ou entre U_3 e U_4 verifica-se o mesmo quanto ao par de díodos D_3 e D_4 (I''' é nula), mas não quanto ao par de díodos D_1 e D_2, e a inclinação da curva que traduz a relação entre U e I é

1) $\frac{dI}{dU} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Para corrente I inferior à correspondente a U_1 ou superior à correspondente a U_4, a condição

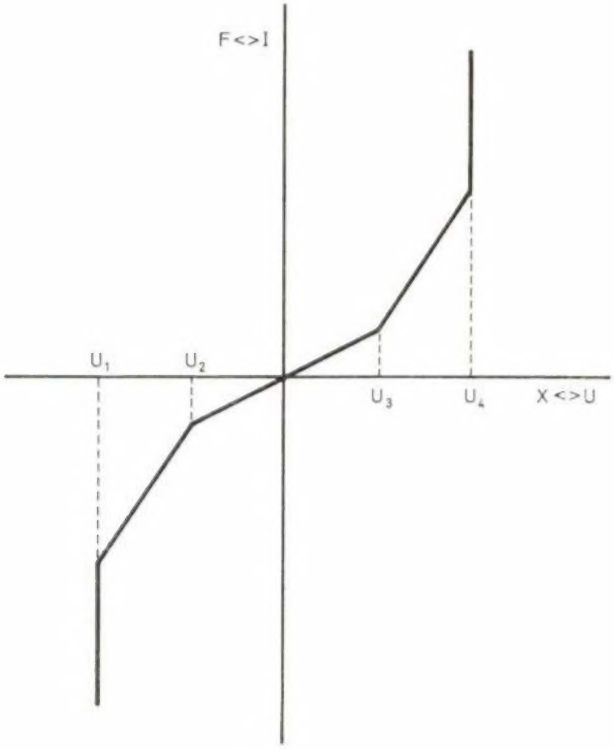


Fig. 10-2 — Exemplo de relação entre a deformação, X, e a força F, numa mola não linear, e da relação correspondente no análogo, correspondendo a X uma tensão U e a F uma corrente I.

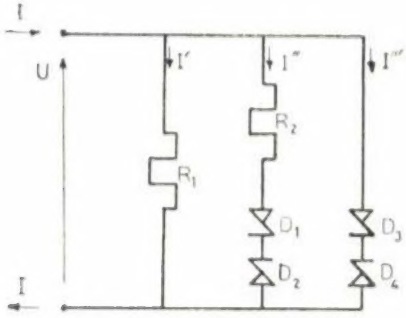


Fig. 10-3 — Análogo de uma mola não linear com a característica de fig. 10-2, em regime estático. O análogo é válido sendo U e I, análogos de X e F, os valores instantâneos da corrente e tensão (ou os valores constantes, em regime estacionário).

citada deixa também de se verificar para D_3 e D_4, impondo um destes díodos, segundo o ramo C (fig. 10-1) da sua característica, a tensão U.

b) *Força de atrito*

Suponhamos, em regime dinâmico, uma força de atrito, caracterizada por uma relação entre a velocidade, v, e a força, f, do tipo da representada na fig. 10-4.

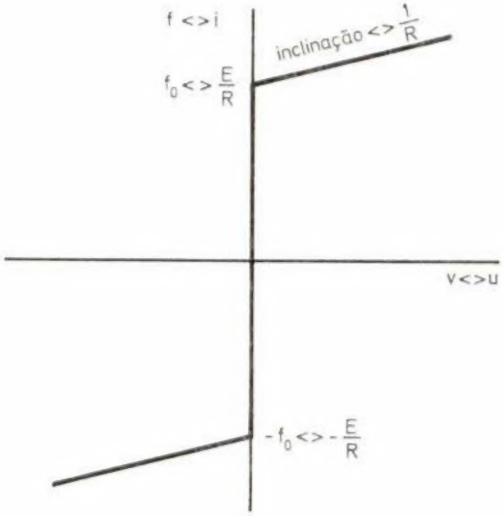


Fig. 10-4 — Relação entre a velocidade, v, e a força f, do tipo de uma força de atrito, e relação correspondente entre os respectivos análogos, tensão, u, corrente i, tendo os restantes parâmetros o significado indicado no circuito análogo da fig. 10-5.

Consideremos o circuito indicado na fig. 10-5, sendo E a tensão, estacionária, de um gerador de tensão. Fazendo corresponder a força f à corrente i, a tensão u à velocidade v, $\frac{1}{R}$ à inclinação da relação entre v e f, e $\frac{E}{R}$ a f_0, tem-se um análogo da relação entre f e v.

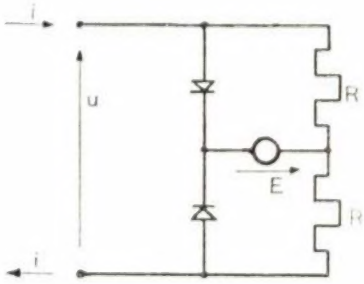


Fig. 10-5 — Circuito análogo de uma relação velocidade-força de um sistema com atrito, com a característica indicada na fig. 10-4. O gerador de tensão do análogo é um gerador de tensão E, constante no tempo, e os análogos de f e v são os valores instantâneos de i e u.

c) *Relação deslocamento — deformação de um corpo plástico*

Consideremos o circuito representado na fig. 10-6.

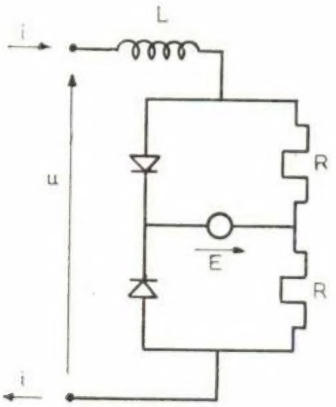


Fig. 10-6 — Circuito tal que, em determinadas condições e com determinada aproximação, traduz uma relação entre i (análogo de uma força) e $\int$ udt (análogo de um deslocamento) do tipo da indicada na fig. 10-7.

Em determinadas condições, e com certa aproximação, este circuito é caracterizado por uma relação entre i (análogo de força) e $\int u\,dt$ (análogo de deformação) do tipo da indicada na fig. 10-7, podendo ser desta forma utilizado para simular deformações de tipo plástico.

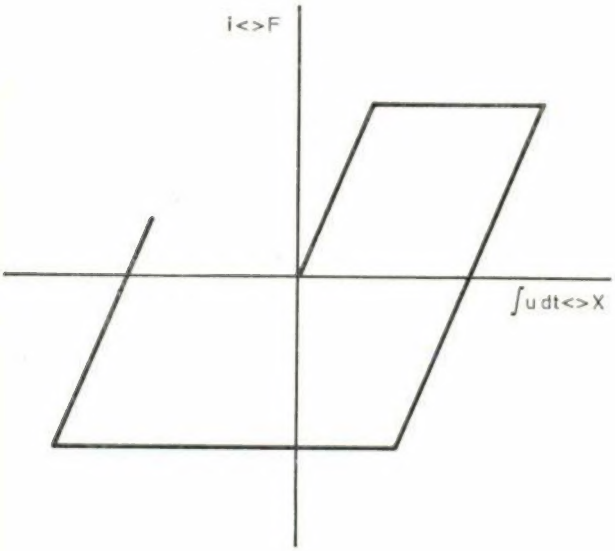


Fig. 10-7 — Relação entre uma força F (tendo por análogo o valor instantâneo de uma corrente i) e um deslocamento X (tendo por análogo o valor instantâneo de $\int$ udt), do tipo da de um corpo plástico.

11) CÁLCULO ANALÓGICO DE DEFORMAÇÃO DE PLACAS

O cálculo de deformação estática de placas elásticas lineares é, em geral e se satisfeitas determinadas condições, redutível à resolução de equações do tipo

$$1)\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{dx^2}\right)F=a,$$

ou semelhantes, sendo x e y as coordenadas cartesianas da placa, a um parâmetro, função de x e y (nulo nalgumas hipóteses de deformação) e F uma função de x e y.

Fazendo

$$2)\quad G=G(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

tem-se

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}=a \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=G. \end{cases}$$

Tem-se, assim, o cálculo da deformação de placas reduzido à resolução simultânea de duas equações de Poisson, da forma 3), o que é possível com análogos constituídos apenas por resistências (além de fontes de tensão e-ou-corrente).

No caso de placas sujeitas a forças e deformações segundo a direcção z, ortogonal a x e y, tem-se o seguinte significado dos parâmetros das equações 3):

4) $F=z$ deformação transversal

5) $a=\dfrac{q}{D}$

sendo q a densidade de carga e D um parâmetro de rigidez

6) $G=-M$

sendo M o «momento flector total» tal que

$$7)\quad M=\frac{M_x+M_y}{D(1+\mu)}$$

sendo M_x e M_y momentos flectores referidos às direcções x e y,

8) $$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

9) $$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$$

e μ a relação de Poisson.

No caso de placas sujeitas a forças e deformação apenas segundo as direcções x e y (deformação transversal nula) tem-se

10) $$a = 0$$

11) $$G = \sigma_x + \sigma_y$$

12) $$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

13) $$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

14) $$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y},$$

sendo σ_x, σ_y, τ_{xy}, as tensões referidas às direcções x, y.

Consideremos um quadriculado segundo as direcções x e y e o circuito representado na fig. 11-1, em que duas malhas de resistência R e r correspondam a esse quadriculado da placa, sendo a proporção das várias resistências e ordem de grandeza das tensões e correntes aplicadas e das tensões resultantes tais que, com suficiente aproximação:

- as correntes i sejam desprezáveis para efeitos das tensões na malha de resistências R;
- as correntes i sejam definidas pelas tensões da malha de resistência R e pràticamente não afectadas pelas tensões da malha de resistências r;
- as correntes I sejam proporcionais ao parâmetro a nos pontos x, y correspondentes aos nós da malha de resistências R em que são injectadas.

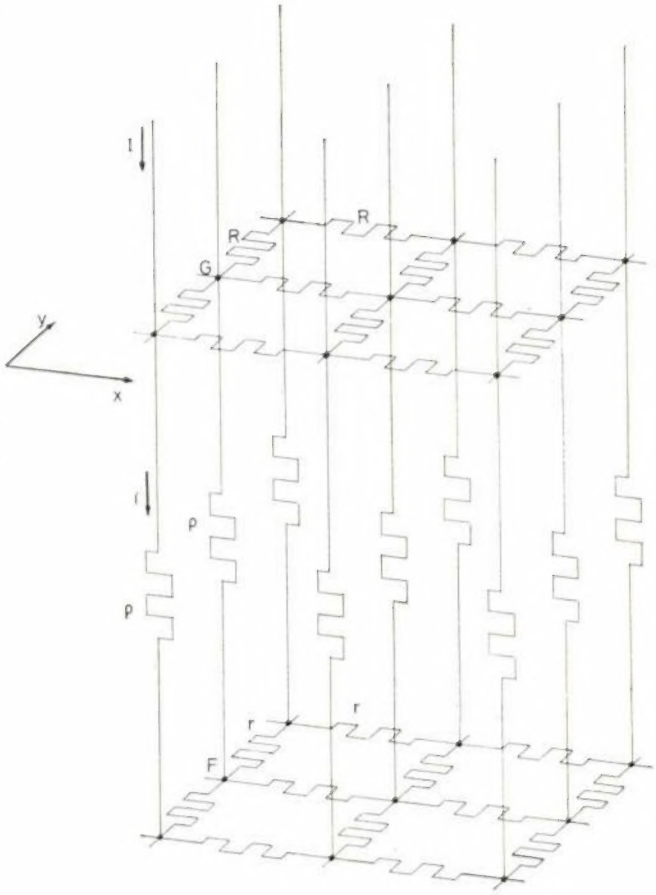


Fig. 11-1 — Representação esquemática de um circuito constituído por dois quadriculados de resistências, R e r, correspondentes a uma decomposição num quadriculado segundo as direcções x e y de uma placa, sendo os nós dos dois quadriculados ligados por resistências ρ. As tensões, em relação a um nó de referência, dos nós do quadriculado R, são o análogo dos valores da função Θ, e as dos nós do quadriculado r são o análogo dos valores da função F, nas condições indicadas no texto.

Nestas condições, dentro da aproximação de diferenças finitas, as tensões dos nós das malhas de resistências R e r, em relação a um nó de referência, serão, respectivamente, os análogos de G e F.

Desta forma, impondo condições análogas das condições de carga e ligação da placa, têm-se, por medida directa no análogo, as grandezas G e F, podendo obter-se a partir delas as várias grandezas que interesse determinar (eventualmente por um circuito «análogo» das relações entre G, F e essas grandezas).